All'Illmo Sig.
Comm. Prof. Enrico Betti
Segretario Generale al Ministero
dell'Istruzione Pubblica
Omaggio
dell'Autore

TRATTATO
D' ALGEBRA ELEMENTARE

AD USO
DEI LICEI, SCUOLE TECNICHE
ED ISTITUTI INDUSTRIALI E PROFESSIONALI
DEL

CAV. INGEGNERE GIOVANNI GUIDOTTI
PROFESSORE DI MATEMATICA
NEL R. LICEO *SPALLANZANI*
PRESIDE
E PROFESSORE DI MATEMATICA, GEODESIA
E MECCANICA ELEMENTARE
NEL R. ISTITUTO INDUSTRIALE E PROFESSIONALE
IN REGGIO DELL' EMILIA

CON NOTE STORICHE INTERCALATE NEL TESTO

Seconda edizione riveduta ed ampliata dall' autore.

REGGIO DELL' EMILIA
PRESSO GIUSEPPE BARBIERI EDITORE
1869.
TORINO, FIRENZE, MILANO
Presso G. B. Paravia e C.

TRATTATO
D' ALGEBRA ELEMENTARE

AD USO

DEI LICEI, SCUOLE TECNICHE

ED ISTITUTI INDUSTRIALI E PROFESSIONALI

DEL

CAV. INGEGNERE GIOVANNI GUIDOTTI

PROFESSORE DI MATEMATICA

NEL R. LICEO *SPALLANZANI*

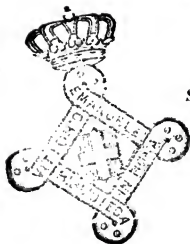
PRESIDE

E PROFESSORE DI MATEMATICA, GEODESIA

E MECCANICA ELEMENTARE

NEL R. ISTITUTO INDUSTRIALE E PROFESSIONALE

IN REGGIO DELL' EMILIA

CON NOTE STORICHE INTERCALATE NEL TESTO

Seconda edizione riveduta ed ampliata dall' autore.

REGGIO DELL' EMILIA

PRESSO GIUSEPPE BARBIERI EDITORE

1869.

TORINO, FIRENZE, MILANO

Presso G. B. Paravia e C.

INDICE

PER ORDINE DELLE MATERIE

CAPITOLO I.	Le prime quattro operazioni sulle quantità algebriche	pag. 1
§. 1.	Nozioni preliminari	» ivi
§. 2.	Addizione	» 8
§. 3.	Sottrazione	» ivi
§. 4.	Moltiplicazione	» 9
§. 5.	Divisione dei monomi	» 17
§. 6.	Frazioni algebriche	» 21
§. 7.	Divisione dei polinomi	» 27
§. 8.	Divisibilità di un polinomio per un binomio della forma $x-a$	» 32
CAPITOLO II.	Delle potenze e delle radici dei monomi .	» 35
§. 1.	Potenze dei monomi	» ivi
§. 2.	Radici dei monomi	» 39
§. 3.	Calcolo dei radicali	» 43
§. 4.	Esponenti frazionari. Esponenti negativi .	» 49
CAPITOLO III.	Delle equazioni di primo grado	» 57
§. 1.	Principj generali relativi alle equazioni .	» ivi
§. 2.	Risoluzione delle equazioni di primo grado ad un' incognita	» 65
§. 3.	Risoluzione di problemi	» 69
§. 4.	Risoluzione delle equazioni di primo grado a due o più incognite	» 75
§. 5.	Discussione delle formole di risoluzione delle equazioni di primo grado	» 90
CAPITOLO IV.	Delle permutazioni e combinazioni . .	» 114
§. 1.	Delle permutazioni	» ivi
§. 2.	Delle combinazioni	» 126
CAPITOLO V.	Delle potenze e delle radici dei polinomi .	» 132
§. 1.	Delle potenze dei polinomi	» ivi
§. 2.	Delle radici dei polinomi	» 142
CAPITOLO VI.	Delle equazioni di secondo grado e di quelle che si riducono al secondo grado . .	» 157
§. 1.	Risoluzione delle equazioni di secondo grado .	» ivi
§. 2.	Risoluzione delle equazioni ad un' incognita che si riducono a quelle di secondo grado	» 175
§. 3.	Risoluzione di equazioni simultanee a più incognite di secondo grado	» 183

Capitolo VII.	Delle disuguaglianze	pag. 187
§. 1.	Principj generali relativi alle disuguaglianze	» ivi
§. 2.	Risoluzione delle disuguaglianze di primo grado ad un' incognita	» 194
§. 3.	Risoluzione delle disuguaglianze di secondo grado ad un' incognita	» 196
Capitolo VIII.	Problemi di massimi e minimi	» 202
Capitolo IX.	Massimo comun divisore dei polinomi .	» 210
Capitolo X.	Delle frazioni continue	» 222
Capitolo XI.	Analisi indeterminata di primo grado . .	» 257
Capitolo XII.	Progressioni	» 270
§. 1.	Proporzioni aritmetiche	» ivi
§. 2.	Progressioni per differenza	» 271
§. 3.	Proporzioni geometriche	» 275
§. 4.	Progressioni per quoziente	» 278
Capitolo XIII.	Dei logaritmi	» 281
§. 1.	Proprietà dei logaritmi	» ivi
§. 2.	Costruzione ed uso delle tavole logaritmiche	» 286
§. 3.	Applicazioni a diverse questioni	» 293
Capitolo XIV.	Equazioni trascendenti	» 296
Capitolo XV.	Equazioni algebriche determinate ad una sola incognita	» 298
§. 1.	Proprietà generali delle equazioni algebriche .	» ivi
§. 2.	Delle derivate	» 306
§. 3.	Della trasformazione delle equazioni . .	» 310
§. 4.	Risoluzione delle equazioni numeriche .	» 313
§. 5.	Delle equazioni generali di 3.° e 4.° grado .	» 317
Capitolo XVI.	Delle serie	» 331
	Elenco delle note	» 335

CAPITOLO I.

LE PRIME QUATTRO OPERAZIONI SULLE QUANTITÀ ALGEBRICHE

§. 1. Nozioni preliminari.

1. L' Algebra è la scienza che ha per oggetto lo studio delle quantità discrete, ed insegna le leggi e le operazioni per calcolarle. Le quantità numeriche, sulle quali si ragiona in algebra, considerate essendo come numeri indeterminati, si rappresentano ordinariamente per mezzo di lettere diverse (majuscole, minuscole, accentate, con indici, latine, greche) p. e.

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots\ldots$$
$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots\ldots$$
$$a',\ b',\ c',\ d', \ldots\ldots$$
$$a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2, \ldots\ldots$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \ldots\ldots$$

L' Algebra può dunque anche definirsi la scienza del calcolo dei numeri considerati in una maniera generale, e senza aver riguardo alla loro grandezza, e alle diverse specie di quantità cui essi rappresentano.

2. Si adoprano ordinariamente le prime lettere dell' alfabeto per esprimere le quantità note, e le ultime per indicare le quantità incognite.

In Euclide (300 anni avanti l' era volgare) i numeri generali sono indicati con segmenti rettilinei, e le operazioni sui numeri sono esplicate per mezzo di costruzioni.

In Diofanto matematico alessandrino (secolo IV.°), la cui opera greca fu trovata a Roma e tradotta da Raffaello Bombelli bolognese e Antonio Pazzi reggiano (secolo XVI.°), venivano adoperate le lettere iniziali dei nomi di quantità indeterminate come simboli numerici.

Paccioli Fra Luca toscano (secolo XV.°) espresse con lettere le quantità, le quali pure furono rappresentate con lettere da Nicolò Tartaglia bresciano (secolo XVI.°): Leonardo da Vinci (secolo XV.°) si serviva pure delle lettere dell' alfabeto per rappresentare le quantità algebriche. Più di tutti si valse delle lettere ad esprimere le quantità Girolamo Cardano pavese (secolo XVI.°).

Francesco Viete francese (secolo XVII.°) si servì in un modo sistematico della letterale espressione già usata dai Matematici italiani nei secoli precedenti, ne diffuse il metodo, ed ha perciò il merito non di essere l' inventore del calcolo dei simboli, ma di averne generalizzato l' uso ed il metodo.

3. La *somma* di due quantità risulta dall' aggiungere alla prima la seconda. Entrambe le quantità diconsi i *termini* della somma. La somma delle quantità a e b s' indica scrivendo $a+b$ e si legge a più b.

4. Il *prodotto* è la somma di termini eguali: il termine che si ripete dicesi *moltiplicando*, il numero dei termini *moltiplicatore*. Il prodotto delle quantità a e b si esprime $a.b$, ovvero con $a\times b$, oppure con ab, e si legge a moltiplicato per b: ciò significa che la quantità a deve ripetersi b volte. Il prodotto $3.a$, ovvero $3\times a$, oppure $3a$ esprime che la quantità a deve ripetersi tre volte, ossia che si deve avere $a+a+a$.

Il *moltiplicatore* ha ricevuto il nome di *coefficiente*, il quale si suole scrivere alla sinistra, e indica quante volte questa quantità si deve prendere.

Il *moltiplicando* e il *moltiplicatore* sono i *fattori* del prodotto: se questi non sono espressi con lettere, ma con cifre numeriche, il segno della moltiplicazione non si può tralasciare. Così 5 ripetuto sei volte non si può scrivere 56, ma 5.6, ovvero 5×6.

Per affermare che la grandezza a è eguale alla grandezza b si scrive $a=b$, e si legge a è eguale a b. Perciò si avrà

$$3x = x + x + x$$
$$2y = y + y$$
$$3xy = xy + xy + xy$$
$$5abc = abc + abc + abc + abc + abc$$

5. *Potenza* è il prodotto di fattori eguali. Il fattore che si ripete dicesi *base*, il numero dei fattori *esponente:* questo si scrive a destra e un po' al disopra della base. La b^{esima} potenza di a, cioè il prodotto di b fattori eguali ad a, si indica scrivendo a^b, e si legge a elevato alla b^{esima} potenza, o a coll' esponente b; la terza potenza di x si scrive x^3, e si legge x tre, o x elevato alla terza, ovvero x coll' esponente tre.

La prima potenza di un numero è lo stesso numero; la seconda potenza di un numero si chiama il suo *quadrato*, la terza *cubo*, la quarta *biquadrato:* nella prima potenza l' esponente, che non si indica, è 1.

$$a^1 = a$$
$$a^2 = aa$$
$$a^3 = aaa$$
$$a^4 = aaaa = a^2.a^2 = a^3.a$$
$$3x^2 = x^2 + x^2 + x^2 = xx + xx + xx$$
$$2x^2y = x^2y + x^2y = xxy + xxy$$

6. La *differenza* di due quantità è quell' altra che aggiunta alla seconda dà la prima: questa dicesi *minuendo*, la seconda *sottraendo*. La differenza di a e b si scrive $a - b$, e si legge a meno b.

Se il minuendo e il sottraendo sono eguali la differenza è zero. Se il minuendo è più piccolo del sottraendo, la differenza non può venire presentata che sotto la forma di un sottraendo senza il minuendo.

$$10-8=2$$
$$10-10=0$$
$$8-10=8-8-2=0-2=-2$$

Per potere eseguire tutte le sottrazioni, si suppone che la serie dei numeri naturali decrescendo non termini allo zero, ma continui anche al disotto mediante numeri preceduti dal segno — della sottrazione e chiamati *negativi*, mentre i numeri naturali al disopra dello zero, per mettere in evidenza l' antitesi, si possono far precedere dal segno + dell' addizione, e si chiamano *positivi*.

$$\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1,\ 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\ldots$$

Lo zero è il confine o il limite che separa le suddette quantità positive e negative. Poichè la quantità positiva diminuendo continuamente diviene zero, e poi continuando a diminuire si trasforma in negativa, e si allontana dallo zero, così si vede che una quantità positiva è tanto più grande, quanto è più lontana da zero, e la negativa quanto vi è più vicina.

7. Le quantità, o i numeri possono dunque assumere due nature opposte; le une diconsi *positive*, e le altre *negative*: queste sono precedute dal segno — della sottrazione, quelle dal segno + dell' addizione. Questi segni avendo due significati, rappresentando cioè una operazione ovvero la natura della quantità,

permetteranno di potere considerare una *differenza* come una *somma*, un termine della quale sia negativo. Così $a - b$ può significare tanto a meno b (sottrazione), quanto a più la quantità $-b$ (addizione).

L' introduzione dei numeri negativi è un importante progresso dei Matematici moderni, che cominciò quasi simultaneamente coll' introduzione del calcolo letterale nel secolo sedicesimo. La notazione di un valore positivo o negativo mediante una stessa lettera si deve specialmente a Descartes matematico francese (1637).

8. Due quantità si dicono *equali opposte*, se sono eguali e con segno contrario, cioè se la loro somma è 0:

$1-1=0;\ 7-7=0;\ a-a=0;\ 3x-3x=0.$

9. Il *quoziente* di due quantità è quell' altra quantità che moltiplicata per la seconda dà la prima. Questa dicesi *dividendo*, e la seconda *divisore*. Il quoziente di x e y si scrive $\frac{x}{y}$, ovvero $x:y$ e si legge x diviso per y.

10. *Formola algebrica*, o *formola* è l' unione di più quantità mediante simboli di operazioni, p. e.

$a+x,\ 3a,\ 2x^2+x+c.$

Dicesi *termine* o *monomio* una formola algebrica che contiene una o più quantità non separate fra loro dal segno + o dal segno —; una formola dicesi *binomio*, *trinomio*, *polinomio* se contiene due, tre, più termini;

sono monomi le espressioni algebriche a, $2x^2$, $3x^2y^3$;
sono binomi le formole $a+b$, $3x^2-2y^3$, $4xy+y^2$;
è un trinomio la formola $a+cx-bx^2$;

è un polinomio l' espressione $1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$ Un termine, che non contiene nè divisori nè esponenti negativi, si dice *intiero:* altrimenti dicesi frazionario.

11. Le formole si combinano, come le singole lettere mediante i noti simboli delle operazioni, racchiudendole fra parentesi: per esprimere che si deve moltiplicare il trinomio $a+bx+cx^2$ pel binomio $3+y$ si scriverà $(a+bx+cx^2) \,.\, (3+y)$, o $(a+bx+cx^2) \times (3+y)$, ovvero $(a+bx+cx^2)\,(3+y)$; per indicarne la divisione si noterà $(a+bx+cx^2) : (3+y)$ ovvero $\dfrac{a+bx+cx^2}{3+y}$.

12. Il monomio non preceduto da alcun segno è positivo: i coefficienti e gli esponenti eguali ad 1 non si scrivono; l' espressione $+\,1.a^1$ si scriverà più semplicemente a.

13. La somma degli esponenti di un *termine* intiero determina ciò che si chiama le *dimensioni* del monomio, o il suo *grado;* così il termine $2a^2$ dicesi di secondo *grado,* o di due dimensioni; il monomio $3x^3$ è di tre *dimensioni*, o di terzo *grado;* l' espressione $7.a^x \,.\, c^y$ è del *grado* $x+y$.

I termini si chiamano *omogenei*, quando sono del medesimo *grado*, ed un polinomio dicesi *omogeneo,* quando è composto di termini *omogenei.* Sono omogenei i termini $3ax^2y$, $2x^4$, $4cy^3$, $abcd$: è omogeneo il polinomio $a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$.

14. Diconsi *simili* due o più termini quando contengono le medesime lettere affette rispettivamente dagli stessi esponenti, qualunque siano i loro segni ed i loro coefficienti. Sono *simili* i quattro termini $2a^3y+5a^3y-8a^3y+4a^3y$: sono pure *simili* i seguenti termini: $3x^3y^2-2x^3y^2+8x^3y^2+100x^3y^2$.

Se in un polinomio due o più termini sono *simili*, questi si possono ridurre in un termine solo, facendo sui loro coefficienti le operazioni indicate dai rispettivi segni. Così se si hanno i tre termini simili $a^2c + 3a^2c + 4a^2c$, ciò che significa una volta la quantità a^2c, più tre volte la stessa quantità, più quattro volte la medesima quantità, si può scrivere otto volte la data quantità, ossia $8a^2c$.

Egualmente

$8.xy - 5.xy = 3.xy$

$10.a^3y - 15.a^3y = -5a^3y$

$10x^2y^3 + 8x^2y^3 - 17x^2y^3 =$....

$ax^3 - 3ax^3 + 8ax^3 + 2ax^3 - 6ax^3 =$....

$3abcx^2 - 10abcx^2 + 8abcx^2 =$....

I segni ora adoperati nel calcolo sono stati introdotti dopo l' invenzione della stampa. Il segno = d' eguaglianza, di cui si servì pel primo l' inglese Roberto Recorde nella sua aritmetica publicata nel 1552, non si generalizzò che cento anni più tardi. Le parole *più* e *meno* s' indicavano in Italia ed in Francia da prima colle lettere *p* ed *m*; è dovuta a Leonardo da Vinci (secolo XV.°) l' invenzione dei segni + e — : in Stiefel si trova l' unione dei fattori senza segno in un prodotto.

Il segno × di moltiplicazione si trova in Oughtred (1631), il quale pel primo scrisse i decimali senza il denominatore introducendo l' uso della virgola; il punto come segno di moltiplicazione si vede in Descartes e Leibnitz (seconda metà del secolo XVII.°).

L' attuale notazione degli esponenti si trova in Stefano de la Roche detto Villefranche (1520), e la denominazione di potenza *prima*, *seconda*, *terza*, *quarta*, ecc. invece dei vecchi nomi *lato* o *radice*, *censo* o *quadrato*, *cubo*, *censo de censo* o *quadratoquadrato* è dovuta a Stevino (1585).

§. 2. Addizione.

15. L' addizione algebrica è l' operazione, colla quale si trova la *somma* di due o più monomi espressi per mezzo di lettere. Sulle quali essendo impossibile eseguire compiutamente le operazioni prima che vi siano sostituiti i relativi valori numerici, il calcolo dell' addizione consisterà soltanto nel trasformare una formola in un' altra, che può diventare più semplice mediante la riduzione dei termini *simili*.

16. Per indicare che si vuole sommare il polinomio P col polinomio Q, si scrive P + Q; qualora queste espressioni siano composte di quantità positive, e di negative, esse si scrivono le une dopo le altre coi loro segni rispettivi. Se vi sono termini *simili*, se ne fa la riduzione.

Se $P = x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 10x - 3$,
$Q = x^3 - 10x^2 - 12x + 7$, si avrà
$P + Q = x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 10x - 3 + x^3 - 10x^2 - 12x + 7 = x^4 + 9x^3 - 15x^2 - 2x + 4$

Esempio

$$P' = x^3 - 5x^2 + 8x - 10$$
$$Q' = 4x^3 + 7x^2 - 20x + 12$$
$$P' + Q' =$$

§. 3. Sottrazione.

17. La sottrazione è l' operazione mediante la quale si trova la differenza fra due monomi, o fra due formole algebriche. Per togliere dal termine t l' altro t' si scriverà $t - t'$: per levare dal polinomio P

l' espressione Q—R si noterà P—(Q—R); ma poichè una differenza non cangia allorchè si aggiunge una stessa quantità a' suoi due termini, così si avrà P—(Q—R)=P+R—(Q—R+R): entro parentesi si ha R—R=0, quindi la chiesta differenza rimarrà P+R—Q. Da questo risultato si ricava la seguente regola generale della sottrazione: cioè per togliere da una quantità M (*Minuendo*) *un polinomio* S (*Sottraendo*) *bisogna cambiare i segni ai termini del polinomio, e poscia aggiungerlo al Minuendo* M: *ossia al Minuendo aggiungere i termini che nel polinomio sono preceduti dal segno —, e sottrarre gli altri dal risultato.*

$M=x^3-8x^2+7x+5$, $P=5x^2-8x+2$, si avrà
$M-P=x^3-8x^2+7x+5-5x^2+8x-2=$
$=x^3-13x^2+15x+3$

Esempi

$M=8x^3+3x^2-4x+10$, $P=4x^3-7x^2+6x-8$,
$M-P=\ldots$
$M'=a^4-7a^3+3a^2-4a+2$
$P'=8a^3-5a+4$
$M'-P'=\ldots$
$M''=3x^2y+4xy^2+8x^2-y^4$
$P''=y^4-x+2xy+x^3y$
$M''-P''=\ldots$

§. 4. Moltiplicazione.

18. La moltiplicazione è l' operazione che si deve eseguire per trovare un *prodotto:* questo può essere il risultato di due fattori *monomî,* o di un fattore *monomio* e l' altro *polinomio,* ovvero di due fattori *polinomi.*

In ciascuno di questi tre casi si hanno quattro regole comuni relative ai *segni*, ai *coefficienti*, alle *lettere*, ed agli *esponenti*.

19. Per cominciare dal caso più semplice si abbia il monomio $3x^2y^3z$ da moltiplicarsi pel monomio $5axy^4$, ossia la notazione $3x^2y^3z \times 5axy^4$, che si può anche scrivere $3.x.x.y.y.y.z \times 5.a.x.y.y.y.y$: poichè cambiando l' ordine dei fattori non si muta il prodotto, così si potrà scrivere $3.5.a.x.x.x.y.y.y.y.y.y.y.z$, la quale espressione semplificata (N.[i] 4, e 5) si cambierà nella formola $15x^3y^7z$. In questo risultato evidentemente si leggono le seguenti tre regole:

Regola dei coefficienti. I coefficienti numerici si moltiplicano tra di loro come nell' aritmetica.

Regole delle lettere, e regole degli esponenti. Le lettere differenti che entrano cioè in un solo dei due fattori si scrivono nel prodotto in ordine alfabetico coll' esponente che hanno in quel fattore: quelle poi che entrano nei due fattori si scrivono una volta sola nel prodotto con un esponente eguale alla somma degli esponenti che ha la medesima lettera nei due fattori.

Esempi

$$3.x^2y^3 \times 2.xyz = 6.x^3y^4z$$
$$8.a^3cy \times 5.axy^3 = 40.a^4cxy^4$$
$$2.axy^3 \times 3.cx^3z = ...$$
$$10.cx^2y^3z^4 \times 15.ax^4y^3z = ...$$

Per trovare la regola dei segni giova qui ricordare (4) che il *moltiplicatore*, non rappresentando che il numero dei termini eguali che si ripetono, come tale non può essere nè positivo nè negativo: perciò

se una quantità Q deve essere moltiplicata per un numero N (positivo), ciò vuol dire che si deve fare un' addizione di N quantità eguali a Q; se la quantità Q deve essere moltiplicata per il numero — N (negativo), ciò significa che si deve fare una sottrazione di N quantità eguali a Q: nel primo caso il prodotto NQ dovendosi addizionare si scriverà +NQ, nel secondo caso dovendosi sottrarre si avrà — NQ (17).

Se si deve moltiplicare la quantità negativa — Q pel numero N (positivo), ciò significa che si deve fare un' addizione di N quantità negative eguali a Q, e la somma dovendo essere negativa si avrà per risultato — NQ: se si ha poi da moltiplicare la quantità negativa — Q pel numero — N (negativo), ciò vuol dire che si deve fare una sottrazione di quantità negative, e il risultato o somma negativa — NQ dovendosi sottrarre si scriverà + NQ.

Riepilogando avremo i seguenti quattro risultati:

$$(+Q).(+N)=+NQ$$
$$(+Q).(-N)=-NQ$$
$$(-Q).(+N)=-NQ$$
$$(-Q).(-N)=+NQ$$

Da questi quattro risultati si ricava la seguente

Regola dei segni. Due fattori col medesimo segno danno prodotto positivo, e due fattori di segno contrario danno un prodotto negativo (*).

20. Se si avranno diversi fattori *positivi* e *negativi* da moltiplicare insieme, per trovare il segno del prodotto finale gioverà avvertire che il prodotto dei fattori dati sarà *positivo* o *negativo* quando il numero dei soli fattori *negativi* sarà *pari* o *dispari*.

(*) Questa regola si trova in Diofanto.

Esempi

$3x.(+2xy)=+6x^2y$
$3x.(-2xy)=-6x^2y$
$2x.(-3y).(2a).(-4y^3).(2a^2x)=+96.a^3x^2y^4$
$2x.(-3y).2a=-12.axy$
$5a.2c.3a^2.2c^2.(-3ac)=....$
$2a^2.(-y).(-x).(-a).(-2axy)=....$
$a.(-a).x.(-x).y.(-y)=....$

21. Passiamo ora alla moltiplicazione di un *polinomio* per un *monomio*. Abbiasi da moltiplicare il polinomio $a+b+c+d$ pel monomio m: questa operazione verrà indicata dalla formola $(a+b+c+d)\ m$, la quale significa che il polinomio ossia ciascuna quantità o termine entro parentesi va ripetuto m volte, ossia moltiplicato per m. Quindi per moltiplicare un *polinomio* per il *monomio* si moltiplica ciascun termine del *polinomio* per il *monomio*, applicandovi le quattro regole già trovate dei *segni*, *coefficienti*, *lettere* ed *esponenti*, e poscia si sommano tutti i prodotti parziali.

$(a+b+c+d)m=am+bm+cm+dm$

$$\begin{array}{l} x^3-2x^2+4x-2 \\ 2ax \\ \hline 2ax^4-4ax^3+8ax^2-4ax \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{l} 2y^3-3y^2+2y-5 \\ 3my^2 \\ \hline \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

22. Venendo alla moltiplicazione di due polinomi, abbiasi da moltiplicare il polinomio $(a+b+c+d)$ per l' altro polinomio $(p+q)$; questa operazione si noterà colla formola $(a+b+c+d)\ (p+q)$, la quale significa che il polinomio moltiplicando, ossia ciascuna quantità o termine entro la prima parentesi va ripetuto p volte, più q volte, ossia moltiplicato per p, ed anche per q. Perciò si conclude che per moltiplicare un *polinomio* per un altro *polinomio* si moltiplica ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore applicando anche qui le quattro regole dei *segni*, *coefficienti*, *lettere* ed *esponenti*, e poscia si sommano i prodotti parziali facendo in seguito, se occorre, la riduzione de' termini simili.

$$(a+b+c+d)\,(p+q)=ap+bp+cp+dp$$
$$+aq+bq+cq+dq:$$
$$(x^2-3x+2)\,(x^2+2x-4)=x^4-3x^3+2x^2$$
$$+2x^3-6x^2+4x-4x^2+12x-8=x^4-x^3$$
$$-8x^2+16x-8$$

Per rendere più facile la riduzione dei termini simili fra i prodotti parziali, si suole scrivere il moltiplicatore sotto il moltiplicando, ed i termini simili dei prodotti parziali in separate colonne: perciò il secondo esempio assumerà la forma

$$\begin{array}{l}
x^2-3x+2 \\
x^2+2x-4 \\
\hline
x^4-3x^3+2x^2 \\
\quad\;\; +2x^2-6x^2+4x \\
\qquad\qquad\;\; -4x^2+12x-8 \\
\hline
x^4-x^3-8x^2+16x-8
\end{array}$$

Si farà egualmente

$$\begin{array}{r} ax-2c \\ ax+c \\ \hline a^2x^2-2acx \\ +acx-2c^2 \\ \hline a^2x^2-acx-2c^2 \end{array}$$

Esempi

1.° Moltiplicando $3x^2-2x+3$
Moltiplicatore $3x-2$
Prodotto $9x^3-12x^2+13x-6$

2.° Moltiplicando $4x^3-3x^2+2x-1$
Moltiplicatore $2x^2-3x+2$
Prodotto . . . .

3.° Moltiplicando x^3+2x^2+3x-2
Moltiplicatore x^3+2x^2+3x-2
Prodotto . . . .

4.° Moltiplicando $1-3x+x^2$
Moltiplicatore $2-2x-x^2$
Prodotto . . . . .

23. Si dice che un polinomio è *ordinato* rapporto a una lettera, quando i termini sono disposti in modo che gli esponenti di questa lettera vadano continuamente diminuendo o aumentando dal primo fino all'ultimo. $x^4-8x^3+2x^2-3x+1$ è un polinomio *ordinato* rapporto a x.

Se due polinomi sono ordinati secondo le potenze discendenti di una lettera, il loro prodotto può essere posto sotto la forma di un polinomio *ordinato* secondo le potenze discendenti della stessa lettera.

Se i termini di un polinomio hanno un fattor comune, si possono raccogliere, scrivendo il fattor comune fuori di una parentesi, e dentro questa i fattori non comuni cogli stessi segni dei singoli termini, o coi segni opposti, secondo che il fattor comune abbia il segno + o —.

$$a+3ax+5ay-cm-ms-mz=$$
$$=a(1+3x+5y)-m(c+s+z)$$

Se la lettera, rispetto a cui si vuol ordinare il polinomio, si trova in più termini collo stesso esponente, si riuniscono questi termini tra parentesi a guisa di nn solo, il quale si riguarda come coefficiente della lettera col suo esponente.

Abbiasi da ordinare il polinomio

$$f+ax^4+dx^2+a^2x^4-a^3x^3-d^3x-d^2x+c^2x^2-cx^3$$

per rapporto alla lettera x: esso prenderà la forma

$$(a+a^2)x^4-(a^3+c)x^3+(c^2+d)x^2-(d^2+d^3)x+f.$$

24. Per eseguire la moltiplicazione fra due polinomi dovendosi moltiplicare ciascun termine dell' uno per ciascun termine dell' altro polinomio si avrà nel prodotto, prima che sia fatta la riduzione dei termini simili, un numero di termini eguale a quello che si ricava col moltiplicare il numero dei termini del moltiplicando per quello dei termini del moltiplicatore.

Ordinati però secondo le potenze discendenti di una medesima lettera i due polinomi *moltiplicando* e *moltiplicatore*, nel prodotto si potrà avere un polinomio ordinato secondo le potenze discendenti della stessa lettera, il quale fatta la riduzione dei termini

simili, conterrà almeno due termini, il primo dei quali sarà il prodotto del primo termine del moltiplicando pel primo termine del moltiplicatore, ed il secondo sarà il prodotto dell' ultimo termine del moltiplicando per l' ultimo del moltiplicatore.

Prima di passare alla operazione della divisione giova riportare alcune forme speciali di prodotti, dei quali si fa un uso frequente in algebra.

$$\begin{array}{lll} a+b & a-b & a+b \\ a+b & a-b & a-b \\ \hline a^2+ab & a^2-ab & a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 & \quad -ab+b^2 & \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2 & \quad a^2-b^2 \end{array}$$

Quindi si hanno le seguenti formole:

$$(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+a^2$$
$$(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Dal primo di questi risultati si legge che il quadrato della somma di due numeri è uguale al quadrato del primo, più il quadrato del secondo, più il doppio prodotto del primo moltiplicato pel secondo. Dalla seconda formola si ha che il quadrato della differenza di due numeri è uguale al quadrato del primo, più il quadrato del secondo, meno il doppio prodotto del primo moltiplicato pel secondo.

Finalmente dal terzo risultato si ricava che la somma di due numeri moltiplicata per la loro differenza eguaglia la differenza dei quadrati degli stessi numeri.

§. 5. Divisione dei Monomi.

25. La divisione è quel calcolo, mediante il quale si decompone una quantità D (dividendo) in d (divisore) parti eguali alla quantità q (quoziente); questa operazione si indica colla formola $\frac{D}{d}=q$, ovvero coll' altra $D:d=q$. Poichè il quoziente q *ripetuto* d volte deve dare per risultato il dividendo D, così si potrà anche scrivere $q.d=D$, che si legge: il *quoziente* moltiplicato pel *divisore* è uguale al *dividendo.*

La *lineetta* per separare il numeratore dal denominatore si trova in Leonardo Fibonacci noto sotto il nome di Leonardo Pisano, nel suo trattato d' Aritmetica intitolato *Incipit liber abaci compositus a Leonardo filio Bonacci*, pisano, anno 1202. L' uso attuale de' due punti per indicare la divisione è dovuto a Leibnitz.

Leonardo Fibonacci nel suo libro d'Aritmetica racconta che aveva imparato l' aritmetica e l' algebra in Africa, dove era stato chiamato da suo padre notajo dei mercanti Pisani alla dogana di Bugia in Barberia: che ivi aveva conosciute le nove figure delle cifre indiane, e si era dato a ricercare tutto ciò che sapevasi in Egitto, nella Siria e nella Grecia intorno alle scienze matematiche. Egli impiegava le figure geometriche per dimostrare le sue regole algebriche.

Esiste nella biblioteca Magliabecchiana in Firenze il codice manoscritto di Leonardo col già notato titolo *Incipit liber abaci*.... Questo codice è stato stampato nel 1857 a Roma dalla tipografia *delle Scienze matematiche e fisiche* e publicato da Baldassarre Boncompagni.

Come nella moltiplicazione, avremo anche qui da trovare quattro regole relative ai segni, coefficienti, lettere ed esponenti.

26. *Regola dei segni.* Dalla relazione $q.d=D$ si scorge che il segno del quoziente q dipende dai segni del dividendo D e del divisore d: e poichè dalle regole dei segni nella moltiplicazione si hanno i quattro seguenti casi:

$$+q.(+d)=+D \quad , \quad -q.(+d)=-D$$
$$+q.(-d)=-D \quad , \quad -q.(-d)=+D,$$ così da queste espressioni si vede che il quoziente sarà *positivo* o *negativo* secondo che i due termini della divisione avranno lo *stesso* segno, o segno *contrario*.

A questo medesimo risultato si sarebbe anche arrivato, se come nella moltiplicazione si fosse considerato che il divisore indicando soltanto il numero delle parti, nelle quali va diviso il dividendo, non può essere negativo, e quindi il quoziente è sempre del medesimo segno e natura del dividendo: se poi il divisore sarà preceduto dal segno —, ciò significherà che il risultato finale o quoziente deve essere sottratto e perciò il segno + o — diverrà — o +.

27. *Regola dei coefficienti, delle lettere e degli esponenti.* Abbiasi da dividere il monomio $4a^5x^3$ per l' altro $2a^2x$. Questa divisione si indicherà per $\frac{4a^5x^3}{2a^2x}$. Il quoziente moltiplicato pel divisore dovendo eguagliare il dividendo, sarà $\frac{4a^5x^3}{2a^2x}=2a^3x^2$, perchè (n.° 19) $2a^3x^2 \times 2a^2x=4a^5x^3$: così si avrà pure

$\frac{10x^8}{5x^4}=2x^4$, perchè $2x^4.5x^4=10x^8$;

$\frac{15a^4y^3}{3a^2y^2}=5a^2y$, perchè $5a^2y.3a^2y^2=15a^4y^3$.

Pertanto da questi risultati si ricava:

1.° che il coefficiente del dividendo diviso pel coefficiente del divisore dà il coeffieiente del risultato finale:

2.° che nel quoziente l' esponente di ciascuna lettera che si trova tanto nel dividendo quanto nel divisore, è uguale all' esponente della lettera nel dividendo meno l' esponente della stessa lettera nel divisore.

$$\frac{20.x^3y^2}{5.x^2y}=4.xy, \frac{30.a^2x^3y^4}{6.ax^2y}=5.axy^3, \frac{8.h^2k^4}{4.hk^2}=2.hk^2$$

Non potendosi eseguire la divisione di una lettera per un' altra diversa p. e. $\frac{a}{b}$, ma soltanto indicarla, si dovrà concludere che qualora nel fare la divisione si trovino lettere non comuni al dividendo e al divisore, queste non permetteranno di eseguire completamente la divisione, che verrà lasciata sotto forma di frazione.

$$\frac{20.ax^3y^2}{5.cxy}=\frac{4.ax^2y}{c}, \quad \frac{4.abc}{2.mxy}=\frac{2.abc}{mxy},$$

$$\frac{7a^2x}{ay}=\frac{7ax}{y}$$

Dunque le lettere che entrano solo o nel dividendo o nel divisore si scrivono al quoziente col medesimo esponente o nel dividendo o nel divisore.

Egualmente non si potrà eseguire la divisione se il coefficiente del dividendo non è un multiplo del coefficiente del divisore, o non l' eguaglia.

Esempi

$$\frac{7a^3}{3a^2}=\frac{7a}{3}\ ;\ \frac{8x^3y}{5xy}=\frac{8x^2}{5}\ ;\ \frac{10abcy}{5acxy}=\frac{2b}{x}\ ;\ \frac{3x^2y}{2ax}=\frac{3xy}{2a}\ ;$$

$$\frac{6a^4}{5ac}=\ ;\ \frac{10x^2y}{2ax}=\ ;\ \frac{42x^3y}{7xyz}=\ ;\ \frac{38a^2x^3y^4}{19a^2x^2z}=$$

28. *Significato dell' esponente zero.* Se nei due termini della divisione vi è una lettera collo stesso esponente, è chiaro che nel quoziente la stessa lettera avrà per esponente *zero*, che è la differenza dei due esponenti:

$$\frac{x^3}{x^3}=x^{3-3}=x^0\ ,\ \frac{y^4}{y^4}=y^{4-4}=y^0\ ,\ \frac{a}{a}=a^{1-1}=a^0\ ;$$

ma una quantità divisa per se stessa essendo eguale all' unità ne viene che le espressioni superiori potranno scriversi $x^0=1, y^0=1, a^0=1$.

Dalle quali possiamo concludere che qualunque quantità coll' esponente *zero* è uguale all' unità.

Quindi le lettere che entrano tanto nel dividendo che nel divisore col medesimo esponente non si scrivono nel quoziente.

$$\frac{8x^2y}{4x^2z}=\frac{2y}{z}\ ,\ \frac{10y^3}{5y^3}=2\ .$$

Questo simbolo di una quantità coll' esponente *zero* serve qualche volta per introdurre in una espressione algebrica una data lettera senza alterarne il valore: p. e.

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3+bx^2+cx+dx^0.$$

29. *Significato dell' esponente negativo.* Qualche volta si trova che l' esponente di una lettera nel dividendo è minore dell' esponente della stessa lettera nel divisore: in questo caso nel quoziente la lettera avrà l' esponente negativo.

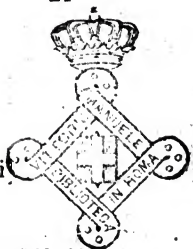
$$\frac{x}{x^5}=x^{1-5}=x^{-4}\ ,\ \frac{y^2}{y^5}=y^{2-5}=y^{-3}$$

Ma è facile vedere che

$$\frac{x}{x^5}=\frac{x}{x.x^4}=\frac{1}{x^4}\ ,\ \frac{y^2}{y^5}=\frac{y^2}{y.^2y^3}=\frac{1}{y^3}\ :$$

perciò, confrontando, si avranno le relazioni

$$x^{-4}=\frac{1}{x^4}\ ,\ y^{-3}=\frac{1}{y^3}$$

Dalle quali si ricava che una quantità qualunque con un esponente negativo è uguale all' unità divisa per la stessa quantità coll' esponente positivo.

§. 6. Frazioni Algebriche.

30. Chiamasi *frazione algebrica* ogni espressione della forma $\frac{a}{b}$ essendo a e b due quantità qualunque, intiere o frazionarie, positive o negative: il dividendo dicesi *numeratore*, e il divisore viene chiamato *denominatore.*

La frazione dicesi *impropria* o *apparente* se il numeratore è uguale al denominatore, o ne è un multiplo $\frac{m}{m}=1, \frac{m^3}{m}=m^2$, *pura* se il numeratore è più piccolo del denominatore $\frac{m}{m+n}$, *spuria* o *mista* se il numeratore è più grande del denominatore $\frac{m+n}{m}$.

Una frazione impropria è uguale ad un numero intero, una frazione *pura* è minore di 1, una frazione *spuria* è maggiore di 1.

31. Le frazioni algebriche avendo il medesimo significato e la medesima forma delle frazioni ordinarie dell' aritmetica, saranno soggette alle stesse regole di calcolo ivi dimostrate, onde ci contenteremo qui di enunciarle con alcuni esempi.

32. *Riduzione di un intero in frazione.* Si riduce un intero in frazione avente un dato denominatore, moltiplicando e dividendo l' intero pel denominatore dato. Se si vuole ridurre l' intero a in una frazione che abbia per denominatore b si scriverà $a=\frac{ab}{b}$.

$$3x=\frac{3xy}{y}\ ,\quad abc=\frac{abcmn}{mn}\ ,\quad 8ax=\frac{8abx}{b}$$

33. *Trasformazione delle frazioni algebriche.* Non si altera il valore di una frazione moltiplicando o dividendo i suoi due termini per una stessa quantità. Quindi si avrà

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{acx}{bcx}=\frac{acxy}{bcxy}=\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{abcmx}{abcny}=\frac{bcmx}{bcny}=\frac{cmx}{cny}=\frac{mx}{ny}\ .$$

Da ciò si conclude che si potrà semplificare una frazione sopprimendo i fattori comuni ai due termini: si opera egualmente se questi sono polinomi: p. e.

$$\frac{2a^2b+3a^2c-5a^2d}{3a^2x-2a^2y+3a^2z}=\frac{a^2(2b+3c-5d)}{a^2(3x-2y+3z)}=\frac{2b+3c-5d}{3x-2y+3z}$$

34. *Addizione delle frazioni algebriche.* Si riducono al medesimo denominatore, e poscia si sommano i numeratori, dando alla loro somma per denominatore il denominator comune.

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=\frac{a+b+c}{x},$$

$$\frac{a}{x}+b=\frac{a}{x}+\frac{bx}{x}=\frac{a+bx}{x},$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{q}=\frac{anq}{mnq}+\frac{bmq}{mnq}+\frac{cmn}{mnq}=$$
$$=\frac{anq+bmq+cmn}{mnq},$$

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{ab}+\frac{q}{abc}=\frac{bcm}{abc}+\frac{cn}{abc}+\frac{q}{abc}=\frac{bcm+cn+q}{abc}$$

$$\frac{3x}{y}+\frac{2y}{x}= \quad ; \qquad \frac{a}{2x}+\frac{b}{4x^2}+\frac{c}{8x^3}=$$

35. *Sottrazione delle frazioni algebriche.* La sottrazione si eseguisce come l' addizione, purchè siano cangiati i segni al sottraendo

$$\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=\frac{a-b}{x},\ a-\frac{y}{x}=\frac{ax}{x}-\frac{y}{x}=\frac{ax-y}{x},$$

$$y-\frac{a}{x}=\frac{xy}{x}-\frac{a}{x}=\frac{xy-a}{x}$$

$$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}-\frac{bx}{xy}=\frac{ay-bx}{xy}$$

$$\frac{x}{4}-\frac{x}{8}=\frac{2x}{8}-\frac{x}{8}=\frac{2x-x}{8}=\frac{x}{8}$$

$$\frac{3x}{2y}-\frac{2x}{2y}= \quad , \quad x-\frac{1}{y}= \quad , \quad \frac{8x}{3y}-\frac{x}{6y}=$$

36. *Moltiplicazione delle frazioni algebriche.* Si moltiplicano due o più frazioni fra di loro dividendo il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori.

$$\frac{a}{x}.\frac{b}{y}=\frac{ab}{xy},\ \frac{a}{x}.\ m=\frac{a}{x}.\frac{m}{1}=\frac{am}{x}.$$

$$\frac{a}{x}.\frac{b}{y}.\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz},\ 3.\frac{2x}{y},\frac{3y}{x}.y=,\ \frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{e}=$$

37. *Divisione delle frazioni algebriche.* Si divide una frazione per un' altra moltiplicando la prima per la seconda dopo avere invertiti i termini di questa.

$$\frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a}{b}.\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx},\frac{x}{y}:\frac{2}{3}=\frac{3x}{2y};$$

$$a:\frac{m}{n}=\frac{an}{m},\frac{m}{n}:\ p=\frac{m}{np}$$

$$\frac{x}{a}:\frac{y}{b}=\ ,\ \frac{3x}{a}:\frac{2x}{5a}=\ ,\ 8:\frac{x}{y}=\ ,\ \frac{x}{x}:\ 5=$$

38. Egualmente si dovrebbe operare, se i termini delle frazioni fossero polinomi.

Abbiansi i seguenti esempi: $\frac{x+y}{a}+\frac{m+n}{b}=$

$$=\frac{b(x+y)}{ab}+\frac{a(m+n)}{ab}=\frac{bx+by+am+an}{ab}=;$$

$$\frac{a+b}{x}.\frac{a-b}{y}=\frac{(a+b)(a-b)}{xy}=\frac{a^2-b^2}{xy};$$

$$\frac{x+y}{m}:\frac{n}{a+b}=\frac{(x+y)}{m}.\frac{(a+b)}{n}=\frac{(x+y)(a+b)}{mn};$$

$$\frac{3+2x}{2+2y}:\frac{2-2y}{3-2x}=$$

Con queste regole facilmente si potrà eseguire la moltiplicazione fra due polinomi frazionari.

Abbiasi p. e. $\frac{x^2}{2}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$

$$\frac{2x^2}{3}+\frac{3x}{5}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{2x^4}{6}-\frac{4x^3}{9}+\frac{2x^2}{6}$$

$$+\frac{3x^3}{10}-\frac{6x^2}{15}+\frac{3x}{10}$$

$$-\frac{x^2}{6}+\frac{2x}{9}-\frac{1}{6}$$

Fatte le riduzioni si avrà $\frac{x^4}{3}-\frac{13x^3}{90}-\frac{7x^2}{30}+\frac{47x}{90}-\frac{1}{6}$

39. Due numeri diconsi *reciproci*, ovvero l' uno reciproco dell' altro, se il loro prodotto è 1. Ciascuno di essi eguaglia l' unità divisa per l' altro.

Saranno quantità *reciproche* x e $\frac{1}{x}$, a e $\frac{1}{a}$, 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{m}{n}$ e $\frac{n}{m}$, perchè $x.\frac{1}{x}=1$, $a.\frac{1}{a}=1$, $3.\frac{1}{3}=1$, $\frac{m}{n}.\frac{n}{m}=1$; la reciproca di una frazione *pura* è una frazione *spuria*.

Indicata col segno ∞ una quantità infinitamente grande o l' *infinito*, la reciproca ossia la quantità infinitamente piccola, ossia zero verrà rappresentata da $\frac{1}{\infty}$: quindi si ha $\frac{1}{\infty}=0$.

Questo risultato si sarebbe pure ottenuto se si fosse considerato come varii il valore di una frazione al variare del numeratore o del denominatore. In vero il valore della frazione aumenta coll' aumentare del numeratore, o col diminuire del denominatore, e viceversa diminuisce coll' aumentare del denominatore, o col diminuire del numeratore: perciò se il denominatore sarà infinitamente grande ossia ∞, la frazione sarà infinitamente piccola ossia 0: se invece il denominatore sarà infinitamente piccolo ossia 0, la frazione sarà infinitamente grande ossia ∞.

La prima di queste proposizioni si suole indicare colla formola $lim. \frac{a}{b}=0$, $b=\infty$, che si legge il *limite* della frazione $\frac{a}{b}$ è zero quando b è infinito; la seconda proposizione viene indicata dall' altra formola $lim. \frac{a}{b}=\infty$, $b=0$, che si legge: il *limite* della frazione $\frac{a}{b}$ è l' infinito, quando b è zero.

40. Se a è maggiore di b si scrive $a>b$; se b è maggiore di c si scriverà $b>c$, e per esprimere che b è minore di a, che c è minore di b, si scriverà $b<a$, $c<b$. Queste relazioni si chiamano *diseguaglianze;* e poichè il valore di b è compreso fra i valori di a e di c, così si dice che il valore di b é compreso fra i limiti a e b. Il sistema delle due *diseguaglianze* $b<a$, $b>c$ dicesi perciò *limitazione* per la grandezza b.

Questi segni $>$ o $<$ d' ineguaglianza sono dovuti a Tommaso Harriot, il quale nacque ad Oxford nel 1560 e morì il 2 luglio 1621 a Londra. Più avanti dovremo ricordare ancora questo celebre matematico inglese quando parleremo delle equazioni.

§. 7. Divisione dei polinomi.

41. *Divisione di un polinomio per un monomio.* La divisione di un polinomio per un monomio si eseguisce col dividere ciascun termine del polinomio *dividendo* pel monomio *divisore*, poscia sommando i quozienti ottenuti. Infatti questa somma moltiplicata pel *divisore* riproduce il *dividendo*.

Abbiansi i seguenti tre esempi, avvertendo che i termini della divisione algebrica si possono disporre come nella divisione aritmetica.

1.° $10a^3x^4 - 8a^2x^3 + 6ax^2 \mid 2ax$

$\qquad 5a^2x^3 - 4ax^2 + 3x$

2.° $15a^4y^3 - 30y + 5 \mid 15ay$

$\qquad a^3y^2 - \frac{2}{a} + \frac{1}{3ay}$

3.° $8.a^2y^3 + 6.ay^2 - 4a.xy \mid 2ay$

$\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$

42. *Divisione di un polinomio per un altro polinomio.* Sappiamo che il *quoziente* moltiplicato pel *divisore* deve riprodurre il *dividendo*, il quale perciò si considera come un prodotto di due fattori. Se il dividendo si ordina secondo le potenze decrescenti di una lettera, il suo primo termine contiene questa lettera col massimo esponente, e sarà il prodotto del primo termine del divisore, supposto esso pure egualmente ordinato, per il termine che contiene la stessa lettera col massimo esponente nel quoto (n. 24); perciò se ordinati i polinomi *dividendo* e *divisore* secondo le potenze

discendenti di una medesima lettera, dividiamo il primo termine dell' uno pel primo termine dell' altro, avremo un risultato che sarà il primo termine del polinomio *quoziente.*

Abbiasi da dividere $x^2+12+7x$ pel binomio $3+x$ Disposti i polimoni, come nella divisione aritmetica, dopo d' averli ordinati, si divida il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore: poichè $\frac{x^2}{x}=x$ si avrà x nel quoziente.

$$x^2+7x+11 \mid \underline{x+3}$$
$$x$$

Se il quoziente x moltiplicato pel divisore $(x+3)$ riproducesse il dividendo, l' operazione sarèbbe terminata; ma $x.(x+3)=x^2+3x$ non eguaglia il dividendo, perciò x sarà soltanto una parte o il primo termine del polinomio quoziente.

Per trovare il secondo termine giova ricordare che nel prodotto di due polinomi si hanno diversi prodotti parziali ottenuti dal moltiplicare ciascun termine dell' uno per ciascun termine dell' altro, e quindi il nostro *dividendo* sarà composto di tutti i prodotti parziali che si ottengono moltiplicando il binomio divisore per ciascun termine del quoziente. Levando dunque dal dividendo i prodotti parziali avuti dal moltiplicare i due termini del divisore pel primo termine del quoziente si avrà un residuo che conterrà gli altri prodotti parziali provenienti dal moltiplicare il divisore per gli altri termini del quoziente.

Si faccia la indicata sottrazione:

$$x^2+7x+12 \mid \underline{x+3}$$
$$-x^2-3x \qquad x$$

si ha per residuo $4x+12$, il quale si dovrà dividere per $x+3$. Fatta qui pure la divisione del primo termine $4x$ del dividendo nuovo pel primo termine del divisore si ha $\frac{4x}{x}=4$, che sarà il secondo termine del quoziente: questo risultato 4 moltiplicato pel divisore dovrà sottrarsi, come si è fatto prima, dal residuo o secondo dividendo. Se non si avrà alcun resto, l' operazione sarà terminata.

Ecco il calcolo

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+12 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^2-3x \quad & x+4 \\ \hline 4x+12 & \\ -4x-12 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Abbiansi ancora i seguenti esempi

$$\begin{array}{lr|l} & 2x^3+9x^2+13x+6 & 2x+3 \\ \cline{3-3} 1.^{\circ} \text{ prodotto sottratto} & -2x^3-3x^2 \qquad\qquad & x^2+3x+2 \\ 1.^{\circ} \text{ residuo o secondo dividendo} & 6x^2+13x+6 & \\ 2.^{\circ} \text{ prodotto sottratto} & -6x^2-9x \quad & \\ 2.^{\circ} \text{ residuo o terzo dividendo} & 4x+6 & \\ 3.^{\circ} \text{ prodotto sottratto} & -4x-6 & \\ \text{ultimo residuo} & 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5-8x^4+16x^3-18x^2+13x-6 & x^3-2x^2+3x-2 \\ \hline
-3x^5+6x^4-9x^3+6x^2 & 3x^2-2x+3 \\ \hline
\quad -2x^4+7x^3-12x^2+13x-6 & \\
\quad +2x^4-4x^3+6x^2-4x & \\ \hline
\qquad 3x^3-6x^2+9x-6 & \\
\qquad -3x^3+6x^2-9x+6 & \\ \hline
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{3x^3}{4}+\frac{4x^2}{3}+\frac{43x}{36}+\frac{1}{3} & \frac{x^2}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{2} \\ \hline
-\frac{3x^3}{4}-x^2-\frac{3x}{4} & \frac{3x}{2}+\frac{2}{3} \\ \hline
\quad \frac{x^2}{3}+\frac{4x}{9}+\frac{1}{3} & \\
\quad -\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{9}-\frac{1}{3} & \\ \hline
\quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

43. Nei tre esempi precedenti si sarebbero ottenuti i medesimi risultati, se i polimoni stati fossero invece ordinati secondo le potenze ascendenti.

$$
\begin{array}{l|l}
6+13x+9x^2+2x^3 & 3+2x \\ \hline
-6-4x & 2+3x+x^2. \\ \hline
\quad 9x+9x^2+2x^3 & \\
\quad -9x-6x^2 & \\ \hline
\qquad 3x^2+2x^3 & \\
\qquad -3x^2-2x^3 & \\ \hline
\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

44. Da ciò che si è dimostrato ed eseguito risulta adunque la seguente regola generale per offettuare la divisione dei polinomi: *Ordinati i due polinomi rispetto ad una stessa lettera, si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, osservando le regole relative ai segni, coefficienti, lettere ed esponenti: il termine ottenuto sarà il primo termine del quoziente: si moltiplica questo termine pel divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo.*

Ordinato il resto come il dividendo, si divide il suo primo termine per il primo del divisore, e si ha il secondo termine del quoziente: si moltiplica questo secondo termine per il divisore, e il prodotto si sottrae dal primo resto.

Si continuano così le operazioni finchè si abbia per resto zero, oppure un altro resto che non contenga più il divisore.

Esempi

1.° $a^3 - b^3 \mid a - b$ — Quoziente

2.° $4x^3 + 2x^2 - x + 1 \mid x + 1$ — Quoziente

3.° $6x^5 - 7x^4 + 10x^3 - 7x^2 + 3x - 2 \mid 2x^2 - x + 2$ — Quoziente

4.° $2x^4 + 7x^3 - 16x^2 + 8x - 1 \mid 2x^2 - 3x + 1$ — Quoziente

5.° $\frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{24} - \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{12} + \frac{1}{6} \mid \frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{2}$ — Quoziente

45. A riconoscere se la divisione di un polinomio per un altro si può fare esattamente, giova osservare che, ordinati i polinomi secondo le potenze decrescenti di una medesima lettera:

1.° la divisione non sarà possibile se il primo e l' ultimo termine del dividendo (n. 24) non sono rispettivamente divisibili pel primo e per l' ultimo termine del divisore:

2.° fatte le diverse successive divisioni finchè si giunga ad un *resto* di grado inferiore a quello del divisore, la divisione sarà esatta se questo resto è *nullo:* sarà invece impossibile, se non sarà *nullo,* perchè non si può continuare l' operazione, essendo il resto minore del divisore: in questo caso il quoziente che si cerca sarà composto del quoziente, già ottenuto, più il *resto* diviso pel divisore.

Siano D, d, q, r rispettivamente il dividendo, il divisore, il quoziente, e il resto, si avrà la eguaglianza $\frac{D}{d}=q+\frac{r}{d}$: ossia dovendo essere il dividendo eguale al quoziente totale moltiplicato pel divisore si avrà anche $D=qd+r$.

§. 8. Divisibilità di un polinomio per un binomio della forma x-a.

46. Abbiasi il polinomio P ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e il monomio pure ordinato $x-a$: dicasi Q il quoziente, ed R il resto, si avrà (n. 45)

$$P=Q\,(x-a)+R$$

Il Resto R dovendo essere di un grado inferiore al divisore non potrà contenere la lettera x, e perciò non varierà al variare della quantità x: se questa diventa eguale ad a, ossia si abbia $x=a$, il fattore $(x-a)$ diventa zero, perchè $x-a=a-a=o$, e il termine Q. $(x-a)$ si annulla e sparisce, perchè una quantità moltiplicata per zero è zero: quindi chiamato P_a il polinomio P quando in esso sia fatta $x=a$, si avrà l' eguaglianza $R=P_a$, dove si legge che se si divide un polinomio P ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x per il binomio $x-a$, il Resto R non è altro che lo stesso polinomio, purchè nel medesimo si sostituisca alla x la lettera a. Perchè la divisione sia esatta, il resto deve essere *nullo*, ossia $R=P_a=0$, e perciò la divisione potrà farsi esattamente quando sostituita nel dividendo la lettera a alla x si abbia per risultato lo zero.

47. Dalla precedente proposizione dedurremo facilmente le condizioni di divisibilità del binomio $x^m \pm a^m$ pel binomio $x \pm a$.

Infatti

1.° Si voglia dividere x^m-a^m per $x-a$: se nel dividendo si sostituisce alla x la lettera a, si ha zero per risultato, e perciò il resto essendo zero, la divisione sarà esatta.

Quindi x^m-a^m è divisibile per $x-a$.

Effettuata la divisione si ha:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\dots\dots$$

$$+a^{m-3}.x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}$$

2.° Abbiasi da dividere $x^m - a^m$ per $x + a$: essendo $x + a = x - (-a)$ si potrà anche dire: dividere $x^m - a^m$ per $x - (-a)$; se nel dividendo si sostituisce alla x la quantità $-a$, il risultato sarà zero nel solo caso in cui m sia pari (n. 20), e perciò in questa ipotesi il resto essendo zero, la divisione sarà possibile.

Quindi $x^m - a^m$ è divisibile per $x + a$ quando m è pari.

Fatta la divisione si ottiene

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots\ldots\ldots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1}$$

Questa formola è vera per m pari.

3.° Si debba dividere $x^m + a^m$ per $x + a$, ossia per $x - (-a)$: sostituita nel dividendo la quantità $-a$ alla lettera x, il risultato sarà zero nel solo caso in cui m sia dispari (n. 20), e perciò in questa ipotesi il resto essendo zero, la divisione sarà possibile.

Perciò $x^m + a^m$ è divisibile per $x + a$ quando m è dispari.

Eseguita la divisione si ricava:

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots\ldots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1}$$

Questa formola è vera per m dispari.

4.° Dividere $x^m + a^m$ per $x - a$: sostituita la lettera a alla x nel dividendo, il risultato non è zero, sia m pari o dispari.

Dunque $x^m + a^m$ non è divisibile per $x - a$.

CAPITOLO II.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI DEI MONOMI

§. I. Potenze dei monomi.

48. La *potenza* di un monomio è un prodotto di fattori eguali al monomio (n. 5): il numero dei fattori è il *grado* della potenza; si dirà potenza seconda, terza, quarta ecc. ovvero di 2.° grado, 3.°, 4.°, ecc. secondo che il numero dei fattori è 2, 3, 4, ecc.

Per analogia poi si suole qualche volta dire potenza *prima* o di *primo grado* quando si abbia un solo fattore, nonostante che questo non sia una potenza.

La potenza *prima*, *seconda* e *terza* si chiamano anche rispettivamente potenza *lineare, quadrato, cubo:* questi nomi sono stati presi dalla Geometria.

La quinta potenza del monomio $3ac$ si indicherà $(3ac)^5$, la m^{esima} potenza di $2y$ si noterà $(2y)^m$.

49. Abbiamo visto (n. 20) che un prodotto è positivo quando tutti i fattori sono positivi, oppure, se vi sono fattori positivi e negativi, quando questi siano in numero pari: da questa proposizione si potrà facilmente dedurre:

1.° Che tutte le potenze di quantità positive sono positive.

2.° Che le potenze di quantità negative sono positive se sono di grado pari.

3.° Che le potenze di quantità negative sono negative se saranno di grado dispari.

Le potenze $a^3, a^4, \dots a^m, a^{m+1}$; $(-a)^2, (-a)^4, \dots (-a)^{2m}$ sono positive; le altre $(-a)^3, (-a)^5, \dots (-a)^{2m+1}$ saranno negative.

Perciò il quadrato delle quantità negative è positivo, il cubo delle quantità negative è negativo; e le potenze successive di -1 cominciando dalla prima sono alternativamente negative e positive.

50. Per eseguire alcune trasformazioni sulle formole algebriche è necessario di frequente il ricorrere ad alcuni teoremi sulle potenze, dei quali daremo qui le dimostrazioni.

1.° teorema. *La potenza m^{esima} di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze m^{esime} di ciascun fattore.*

Abbiasi la notazione $(abc)^m$; l' esponente m significa che si hanno m fattori eguali ad abc, ossia m fattori eguali ad a, i quali si scrivono con a^m, m fattori eguali a b, i quali si scrivono con b^m, m fattori eguali a c, i quali si notano con c^m. Perciò si avrà l' eguaglianza $(abc)^m = a^m . b^m . c^m$, nella quale si legge il primo teorema.

Da questo teorema si conclude che per innalzare a potenza un prodotto si deve innalzare alla stessa potenza ciascun fattore.

Esempi

$(3xy)^2 = 9.x^2y^2$; $(2a)^3 = 8a^3$; $(ay)^r = a^r y^r$;
$(2.3)^2 = 4.9$; $(2.4)^r = 2^r.4^r$;
$(2ay)^3 =$; $(4acy)^4 =$; $(acy)^r = \dots$

2.° teorema. *La potenza m^{esima} di una frazione è uguale alla frazione delle potenze m^{esime} del numeratore e del denominatore.*

Colla espressione $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ si vuol indicare che si hanno m fattori eguali alla frazione $\frac{a}{b}$, ma poichè per moltiplicare le frazioni insieme si debbono moltiplicare i numeratori insieme, e denominatori insieme, così si avranno nel numeratore m fattori eguali ad a, che si scrivono con a^m, e nel denominatore si avranno m fattori eguali a b che si rappresentano con b^m. Si avrà dunque l' eguaglianza $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, nella quale evidentemente si scorge il secondo teorema.

Da ciò si deduce che per innalzare a potenza una frazione bisogna innalzare alla medesima potenza ciascun termine della frazione.

Esempi

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}\ ;\ \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\ ;\ \left(\frac{2x}{y}\right)^3=\frac{8x^3}{y^3}\ ;$$

$$\left(\frac{abc}{xy}\right)^r=\frac{a^rb^rc^r}{x^ry^r}\ ;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\ ;\ \left(\frac{a}{c}\right)^2=\ ;\ \left(\frac{3xyz}{2abc}\right)^r=\dots$$

3.° teorema. *La potenza* m^{esima} *di una potenza* r^{esima} *è uguale alla potenza* $(mr)^{esima}$.

Sia data l' espressione $(a^m)^r$: l' esponente r significa che si hanno r fattori eguali ad a^m, i quali si notano con a^{mr} (n. 19): da ciò si deduce che $(a^m)^r=a^{mr}$, nella quale si legge il teorema terzo.

Da questo si ha che per innalzare a potenza una quantità affetta da un esponente si deve moltiplicare questo esponente pel grado della potenza.

Esempi

$$(x^2y^3)^2 = x^4y^6\ ;\ \left(\frac{x^3y^2}{a^2c}\right)^3 = \frac{x^9y^6}{a^6c^3}\ ;\ \left(\frac{2x^2}{a^4}\right)^4 = \frac{16x^8}{a^{16}}\ ;$$

$$\left(\frac{x^2}{y^5}\right)^3 = \ ;\ \left(\frac{2ab^2x}{3c^2y^3}\right)^3 = \ ;\ \left(\frac{x^a\ y^b}{z^c}\right)^r = \ldots.$$

51. I teoremi precedenti sussistono anche se gli esponenti sono negativi. Infatti avendo visto (n. 29) che una quantità qualunque con un esponente negativo è uguale all' unità divisa per la medesima quantità coll' esponente positivo si potrà scrivere:

$$1.^{\circ}\ (abc)^{-m} = \frac{1}{(abc)^m} = \frac{1}{a^m . b^m . c^m} = a^{-m} . b^{-m} . c^{-m}$$

$$2.^{\circ}\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{\frac{1}{b^{-m}}}{\frac{1}{a^{-m}}} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$$

$$3.^{\circ}\ (a^m)^{-r} = \frac{1}{(a^m)^r} = \frac{1}{a^{mr}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{-mr}}} = a^{-mr}\ .$$

La prima traccia di un calcolo con esponente si trova in Archimede (nato in Siracusa nell'anno 287 avanti l'era volgare). Esponenti negativi furono impiegati da Stiefel.

L' idea generale di *potenza* si deve specialmente a Newton.

§. 2. Radici dei monomi.

52. Si chiama *radice* di una quantità uno dei fattori eguali, il cui prodotto è la quantità stessa: si dirà poi *radice seconda, terza, quarta,..... m*^{esima} secondo che il numero dei fattori è 2, 3, 4,.....*m*. La *radice seconda* e *terza* diconsi ancora rispettivamente *radice quadrata* e *cubica.*

Dicesi *grado* di una radice di una quantità l'*esponente* al quale si deve innalzare la radice per riprodurre la stessa quantità. Così dicesi radice *seconda, terza, quarta* ecc. di una quantità quell' altra quantità che innalzata alla seconda, alla terza, alla quarta ecc. riproduce la prima. Il *grado* della radice prende anche il nome di *indice radicale,* o *indice della radice.*

La radice di un grado qualunque di una quantità si indica col segno $\sqrt{\ }$ chiamato *segno radicale*, alla destra del quale si scrive la quantità, di cui si cerca la radice: si pone poi superiormente e nell' apertura del segno *radicale* il numero che indica il grado della radice.

La radice	seconda	della quantità	m	si noterà	$\sqrt[2]{m}$
»	terza	»	m	»	$\sqrt[3]{m}$
»	quarta	»	m	»	$\sqrt[4]{m}$
»	q^{esima}	»	m	»	$\sqrt[q]{m}$

Ordinariamente si omette l' indice 2, quando si vuol esprimere la radice seconda, e perciò si scriverà $\sqrt{a}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ per indicare la *radice seconda* di *a*, la *radice seconda* di *x*, la *radice seconda* di *y*:

In CRISTOFORO RUDOLFF si trovano segni particolari per le singole radici. STEFANO DE LA ROCHE poneva gli esponenti sopra il segno *R* adoperato come segno radicale, e STIEFEL adoperava un segno radicale, accanto al quale metteva l' esponente.

53. Dalla definizione della *potenza* e della *radice* risulta evidente che l' estrazione di radice è l' operazione inversa dell' innalzamento a potenza: per la quale relazione i tre teoremi precedenti potranno pure riferirsi all' estrazione di radice, purchè vi si facciano le operazioni inverse, e si cambieranno nei tre seguenti:

1.° *La radice* m^{esima} *di un prodotto è uguale al prodotto delle radici* m^{esime} *di ciascun fattore.*

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \; ; \; \sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

Quindi per estrarre la radice da un prodotto bisogna estrarre la radice da ciascun fattore.

2.° *La radice* m^{esima} *di una frazione è uguale alla frazione delle radici* m^{esime} *dei due termini.*

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \; ; \; \sqrt[5]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{8}}$$

Onde per estrarre la radice da una frazione bisogna farne l' estrazione dal numeratore e dal denominatore.

3.° *La radice* m^{esima} *della radice* r^{esima} *di una quantità è uguale alla radice* $(mr)^{esima}$ *della stessa quantità.*

$$\sqrt[m]{\sqrt[r]{y}} = \sqrt[mr]{y} \; ; \; \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$$

Dunque una quantità soggetta a più radicali è uguale alla stessa quantità avente un sol vincolo radicale, il cui indice è il prodotto degli indici dei radicali dati.

54. Si è già visto che per fare la potenza di una quantità, si deve moltiplicare l' esponente della quantità pel grado della potenza, così per eseguire l' operazione opposta, ossia la estrazione di radice, bisogna dividere l' esponente della quantità per l' indice radicale: perciò volendo la radice terza della espressione y^4, noteremo $\sqrt[3]{y^4} = y^{\frac{4}{3}}$; così pure

$$\sqrt[3]{x^6.y^9} = \sqrt[3]{x^6}\,.\,\sqrt[3]{y^9} = x^{\frac{6}{3}}\,.\,y^{\frac{9}{3}} = x^2.y^3\ ;$$

$$\sqrt[m]{x^r.y^n} = x^{\frac{r}{m}}\,.\,y^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a^m.y^m}{c^{mn}.h^{mn}}} = \frac{\sqrt[m]{a^m.y^m}}{\sqrt[m]{c^{mn}.h^{mn}}} = \frac{a^{\frac{m}{m}}\,.\,y^{\frac{m}{m}}}{c^{\frac{mn}{m}}\,.\,h^{\frac{mn}{m}}} = \frac{a.y}{c^n.h^n}\ ;$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a^m}{c^n}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^m}{c^n}} = \frac{\sqrt[mn]{a^m}}{\sqrt[mn]{c^n}} = \frac{a^{\frac{m}{mn}}}{c^{\frac{n}{mn}}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} = \ ;$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3.c^{12}}{x^3.y^9}} = \ ; \quad \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{x^{24}}{y^{48}}}}} = \ldots.$$

Da ciò risulta che per potere estrarre una radice da un monomio è necessario che il suo coefficiente sia potenza esatta del grado eguale all' indice radicale, e che tutti gli esponenti delle lettere siano divisibili esattamente per l' indice stesso:

$$\sqrt{9x^2y^4} = 3xy^2\ ;\ \sqrt[3]{8x^3y^{12}} = 2xy^4\ .$$

55. Quando alcune soltanto delle quantità, che costituiscono il monomio sotto il segno radicale, sono potenze esatte del grado eguale all' indice radicale, si potrà semplificare l' espressione estraendo la radice da quei fattori che sono potenze esatte.

$$\sqrt[4]{x^4.y^8.z^3}=x.y^2.\sqrt[4]{z^3}\,;\ \sqrt{x^2.y.z}=x.\sqrt{yz}\,;\ \sqrt[3]{x^3.y^2}=$$

56. Se l' esponente della quantità sotto il segno radicale non è divisibile esattamente per l' indice radicale, l' estrazione di radice non si può eseguire esattamente, e vi rimane un esponente frazionario.

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}},\ \sqrt[r]{a^2c^3}=a^{\frac{2}{r}}.c^{\frac{3}{r}}$$

Da queste formole potremo dunque stabilire che il denominatore dell' esponente frazionario di una quantità rappresenta il grado della radice da estrarre dalla quantità con un esponente eguale al numeratore dell' esponente frazionario.

Così $x^{\frac{2}{3}}$ indica $\sqrt[3]{x^2}$, $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$, $x^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{x^n}$.

L' esponente potendo rappresentare o *innalzamento a potenza*, o *estrazione di radice* secondochè è intero o frazionario, ne verrà di conseguenza che le radici si possono considerare come potenze con esponenti frazionari; e sotto questo aspetto furono già considerate da Stevin e da Newton.

§. 3. Calcolo dei radicali.

57. Un' espressione algebrica dicesi *razionale* se non vi è indicata alcuna estrazione di radice, ovvero se contiene radici esatte; chiamasi poi *irrazionale* se contiene radicali da cui non si possa esattamente estrarre le radici. La quantità

$a, \sqrt{x^2}, \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}, \frac{3x}{2y}$ sono quantità *razionali;* le

espressioni $\sqrt{a}, a+\sqrt{x}, x-\sqrt{ac}$, sono *irrazionali.*

Le quantità *razionali* si chiamano anche *commensurabili*, e le *irrazionali* si dicono pure *incommensurabili* o *sorde*. Questa ultima parola si trova in LEONARDO FIBONACCI (1202) e fu adoperata sino al secolo XVIII.° Il X libro di EUCLIDE tratta delle quantità irrazionali.

58. Prima di vedere come si possano eseguire le sei operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, innalzamento a potenza ed estrazione di radice sui radicali, gioverà premettere alcune norme colle quali si trasformano i medesimi radicali senza alterarne il valore.

1.ª *Una quantità razionale si può convertire in un radicale di indice* n^{esimo}, *purchè s' innalzi ad una potenza di un grado eguale all' indice radicale. Infatti*

$$a=a^{\frac{n}{n}}=\sqrt[n]{a^n}\,;\; x^2=x^{\frac{2n}{n}}=\sqrt[n]{x^{2n}}\,;\; x^m=\sqrt[n]{x^{mn}}$$

2.ª *Un moltiplicatore di un radicale si può far passare moltiplicatore della quantità posta sotto il segno radicale, purchè s' innalzi ad una potenza di un grado eguale all' indice radicale.* Invero

$$a.\sqrt[3]{x}=a^{\frac{3}{3}}.\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a^3x}$$

(n. 53, teor. 1.°).

$$a\sqrt[m]{y}=a^{\frac{m}{m}}.\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{a^m}.\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{a^my}.$$

3.ª *Un moltiplicatore sotto il segno radicale si può portare fuori del radicale, purchè si estragga dal medesimo la radice del grado stesso del radicale.* Sono evidenti le trasformazioni (n. 53, teor. 1.°)

$$\sqrt[3]{a^3y}=\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{y}=a^{\frac{3}{3}}.\sqrt[3]{y}=a\sqrt[3]{y}\ ;$$

$$\sqrt[m]{a^{mn}.y^r}=\sqrt[m]{a^{mn}}.\sqrt[m]{y^r}=a^{\frac{mn}{m}}\sqrt[m]{y^r}=a^n\sqrt[m]{y^r}\ .$$

4.ª *Si può moltiplicare o dividere per uno stesso numero l' indice di un radicale e gli esponenti di tutti i fattori della quantità sotto il segno radicale senza alterarne il valore.*

Diffatti $\sqrt{ax^3}=a^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{4}}.x^{\frac{6}{4}}=a^{\frac{6}{12}}.$
$x^{\frac{18}{12}}=\sqrt[4]{a^2}.\sqrt[4]{x^6}=\sqrt[12]{a^6}.\sqrt[12]{x^{18}}=\sqrt[12]{a^6.x^{18}};$

$$\sqrt[m]{ax}=\sqrt[mn]{a^nx^n}=\sqrt[mnr]{a^{nr}x^{nr}}.$$

5.ª *Per ridurre al medesimo indice più radicali si deve moltiplicare l' indice di ciascun radicale e gli esponenti delle quantità sottoposte per il prodotto degli indici degli altri radicali.* Infatti siano da ridurre al

medesimo indice le tre radici $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[4]{c^3}$; queste si potranno scrivere $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{2}{3}}$, $c^{\frac{3}{4}}$, che sono rispettivamente eguali alle altre potenze $a^{\frac{12}{24}}$, $b^{\frac{16}{24}}$, $c^{\frac{18}{24}}$; queste poi rimettendole sotto la forma di radici diventeranno $\sqrt[24]{a^{12}}$, $\sqrt[24]{b^{16}}$, $\sqrt[24]{c^{18}}$ già ridotte allo stesso indice;

$\sqrt{x} \,.\, \sqrt[3]{x^4} =$; $\sqrt[3]{x} \,.\, \sqrt[6]{x^8} =$; $\sqrt{y^3} \,.\, \sqrt[3]{y^4} \,.\, \sqrt[4]{y^5} =$

59. Quando la quantità sotto il segno radicale non è più suscettiva di una forma più semplice, allora il radicale medesimo si dice *ridotto alla sua più semplice espressione.*

Colle regole precedenti saranno facili le seguenti riduzioni.

Abbiansi da ridurre alla loro più semplice espressione i seguenti radicali:

$$\sqrt{a^2x^4y^5} = a^{\frac{2}{2}} \,.\, x^{\frac{4}{2}} \,.\, y^{\frac{5}{2}} = ax^2y^{2+\frac{1}{2}} =$$

$$= ax^2 \,.\, y^2 \,.\, y^{\frac{1}{2}} = ax^2y^2 \,.\, \sqrt{y};$$

$$\sqrt[m]{a^{mr} . x^{ms} \,.\, y^n} = a^{\frac{mr}{m}} \,.\, x^{\frac{ms}{m}} \,.\, y^{\frac{n}{m}} = a^r . \, x^s \,.\, \sqrt[m]{y^n}$$

$$\sqrt[15]{a^6 . x^9 . y^{12}} = a^{\frac{6}{15}} . \, x^{\frac{9}{15}} \,.\, y^{\frac{12}{15}} =$$

$$= a^{\frac{2}{5}} \,.\, x^{\frac{3}{5}} \,.\, y^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^2 \,.\, x^3 \,.\, y^4}$$

60. Diconsi radicali *simili* quelli che hanno lo stesso indice, e che contengono la stessa quantità sotto il segno radicale: $a\sqrt{x}$, $b\sqrt{x}$, $-c\sqrt{x}$ sono tre radicali simili, ed i moltiplicatori esterni $a, b, -c$ sono i *coefficienti* dei radicali.

Per vedere se i radicali sono simili, sarà necessario ridurli prima alla loro più semplice espressione, poichè può avvenire qualche volta che alcuni radicali non siano che apparentemente dissimili.

Così $a\sqrt[4]{x^6}$, $b\sqrt{x^3}$, $c\sqrt[6]{x^9}$ sono simili, perchè ridotti diventano rispettivamente

$$a\sqrt{x^3},\ b\sqrt{x^3},\ c\sqrt{x^3}.$$

61. *Addizione* e *Sottrazione.* Tutte le operazioni sui radicali si indicano cogli stessi segni usati per le altre quantità algebriche. Se i radicali sono simili si eseguisce l' addizione e la sottrazione colle stesse regole adoperate per le altre quantità; se poi sono dissimili, l' operazione dell' addizione o sottrazione verrà solo indicata dal segno $+$ o $-$.

Abbiansi da sommare i radicali

$3\sqrt{a}+7\sqrt{a}$, la loro somma sarà $10\sqrt{a}$.
Così $5\sqrt{x}+8\sqrt{x}-10\sqrt{x}+9\sqrt{x}=12\sqrt{x}$.
$a\sqrt{y}-b\sqrt{y}+c\sqrt{y}-d\sqrt{y}=(a-b+c-d).\sqrt{y}$

Se dal trinomio $5\sqrt{a}+7\sqrt{a}-\sqrt{a}$ si vuole sottrarre l' espressione algebrica radicale

$2\sqrt{a}-8\sqrt{a}+10\sqrt{a}$, si avrà
$(5\sqrt{a}+7\sqrt{a}-\sqrt{a})-(2\sqrt{a}-8\sqrt{a}+10\sqrt{a})=$
$11.\sqrt{a}-4\sqrt{a}=7.\sqrt{a}$.

62. *Moltiplicazione.* Per moltiplicare diversi radicali del medesimo indice si eseguisce la moltiplicazione delle quantità situate sotto i segni radicali, e si fa prendere al prodotto il segno radicale comune (n. 53, teor. 1.°).

$$\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x^4}.\sqrt[3]{x^5}.=\sqrt[3]{x^2\,x^4\,x^5}=\sqrt[3]{x^{11}}=$$

$$=x^{\frac{11}{3}}=x^{3+\frac{2}{3}}=x^3.x^{\frac{2}{3}}=x^3.\sqrt[3]{x^2}$$

$$\sqrt{a^3}.\sqrt{3a^3}.\sqrt{3a}.\sqrt{a^5}=3.a^6.$$

Se i radicali da moltiplicare non hanno lo stesso indice, prima di eseguire la moltiplicazione è necessario ridurli allo stesso indice.

$$\sqrt{a^3}.\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[6]{a^9}\sqrt[6]{a^8}=\sqrt[6]{a^{17}}=a^2.\sqrt[6]{a^5}$$

Esempi

$$\sqrt{2x}.\sqrt{x^2}.\sqrt{x^3}=;\quad \sqrt{2x}.\sqrt{x^2}.\sqrt{x^2}=;$$

$$\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[n]{a^m}=....$$

63. *Divisione.* Per dividere due quantità radicali del medesimo indice si fa la divisione delle quantità sotto i segni radicali, e si fa precedere al quoziente il segno radicale comune (n. 53, teor. 2.°).

$$\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{4a}{2a}}=\sqrt{2}\ ;$$

$$\frac{\sqrt[3]{5x^4}}{\sqrt[3]{10x^3}}=\sqrt[3]{\frac{5x^4}{10x^3}}=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\ ;$$

$$\frac{\sqrt[m]{axy}}{\sqrt[m]{axz}}=\sqrt[m]{\frac{axy}{axz}}=\sqrt[m]{\frac{y}{z}}$$

Se i radicali da dividere non hanno lo stesso indice, converrà prima ridurveli.

Esempi

$$\frac{\sqrt{8y}}{\sqrt{4x}}=\sqrt{\frac{8y}{4x}}=\ ;$$

$$\frac{\sqrt[3]{3x^4}}{\sqrt[3]{6x^2}}=\ ;\quad \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^5}}=\ ;\quad \frac{\sqrt[m]{x^r}}{\sqrt[n]{x^a}}=\ ....$$

64. *Innalzamento a potenza.* Per innalzare a potenza un radicale basta innalzare a questa potenza la quantità sotto il segno radicale. Infatti $(\sqrt{a})^3$ indica che si hanno tre fattori eguali a $\sqrt{a}$, ossia $(\sqrt{a})^3=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}=\sqrt{aaa}=\sqrt{a^3}$;
$(\sqrt[m]{x})^r$ significa che si hanno r fattori eguali a $\sqrt[m]{x}$, e perciò $(\sqrt[m]{x})^r=\sqrt[m]{x^r}$.

Esempi

$$\left(\sqrt[4]{\frac{y^2}{x^5}}\right)^2 = ; \quad \left(\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^5}}\right)^4 = ;$$

$$\left\{\sqrt{\frac{4x^4}{3y}}\right\}^3 = ; \quad \left\{\sqrt[m]{\frac{x^r}{y^r}}\right\}^{mn} = ;$$

65. *Estrazione di radice.* Si estrae una radice da un radicale moltiplicando l' indice del radicale per il grado della radice (n. 53, teor. 3.°).

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{x}} = \sqrt[6]{x}\,, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

Esempi

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{2m}}}}} = ; \quad \left\{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{x^8}{y^{12}}}}\right\}^6 = ;$$

§. 4. Esponenti frazionari. Esponenti negativi.

66. Abbiamo visto (n. 54) che si estrae una radice da una quantità, dividendo l' esponente della quantità per l' indice radicale, così che si possono

rappresentare le radici mediante esponenti frazionari:

$$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}, \sqrt[m]{x}=x^{\frac{1}{m}}, \sqrt[n]{x^r}=x^{\frac{r}{n}}.$$

Se fatta la divisione dell' esponente per l' indice, il quoziente risulta intero, la radice è esatta e si chiama *razionale;* se il quoziente non è intero, la radice non è esatta, e si dice *irrazionale.*

Da ciò si potrà dedurre che rappresentate le estrazioni di radici non col simbolo radicale, ma col mezzo degli esponenti, se questi saranno interi indicheranno radici *razionali*, se frazionari rappresenteranno radici *irrazionali.*

67. Per la regola della moltiplicazione riguardo ai segni si ha che il prodotto di due fattori, che abbiano il medesimo segno, è sempre positivo, e perciò una potenza di grado pari sarà sempre positiva: $(-3)(-3)=+9$; $(-a).(-a).(-a).(-a)=+a^4$. Dunque se abbiasi una potenza negativa, questa non potrà mai essere una potenza di grado pari, e perciò la sua radice, che dovrebbe essere di indice pari, non esisterà. Da ciò ne viene la importante conseguenza che le radici di indice pari di quantità negative non esistono: queste radici si chiamano *immaginarie.*

I numeri *immaginari* furono presi in considerazione dopo la risoluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche, come vedremo più avanti. Essi erano allora denominati *impossibili;* perchè non si possono esprimere con numeri reali. Le espressioni *reale* e *immaginaria* si trovano per la prima volta in DESCARTES (matematico francese del secolo XVI.°).

68. La formola generale di una radice *razionale* è $\sqrt[m]{a^{mn}}$, perchè si ha $\sqrt[m]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{m}}=a^n$; la formola generale di una radice *irrazionale* è $\sqrt[m]{a^p}$, purchè sia $m>p$: la formola generale delle radici *immaginarie* è $\sqrt[2m]{-a^p}$.

69. Le radici *irrazionali* introducendo esponenti frazionari nelle formole, per essere $\sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}$, sarà necessario il dimostrare qui che si applicano agli esponenti frazionari le regole stesse del calcolo degli esponenti intieri.

1.ª Per innalzare una quantità con esponente frazionario $a^{\frac{m}{n}}$ ad una potenza q, si deve moltiplicare il suo esponente $\frac{m}{n}$ per il grado q della potenza. Infatti

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^q=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^q=\sqrt[n]{a^{mq}}=a^{\frac{mq}{n}}.$$

2.ª Per innalzare una quantità $a^{\frac{m}{n}}$ con esponente frazionario ad una potenza frazionaria $\frac{q}{r}$, si moltiplica il grado della potenza per l' esponente. Perchè

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{q}{r}}=\sqrt[r]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^q}=\sqrt[r]{a^{\frac{mq}{n}}}=a^{\frac{mq}{nr}}.$$

3.ª Per moltiplicare due potenze $a^{\frac{m}{q}}, a^{\frac{n}{r}}$ di una stessa quantità basta sommare insieme gli esponenti. Invero $a^{\frac{m}{q}} . a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[q]{a^m} . \sqrt[r]{a^n} =$

$$= \sqrt[rq]{a^{mr}} . \sqrt[rq]{a^{nq}} = \sqrt[rq]{a^{mr} . a^{nq}} = \sqrt[rq]{a^{mr+nq}} =$$

$$= a^{\frac{mr+nq}{rq}} = a^{\frac{mr}{rq} + \frac{nq}{rq}} = a^{\frac{m}{q} + \frac{n}{r}}.$$

4.ª Per dividere una potenza di una quantità, $a^{\frac{m}{n}}$, per un' altra potenza della stessa quantità $a^{\frac{q}{r}}$, basterà fare la differenza fra gli esponenti. Infatti

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{q}{r}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[r]{a^q}} = \frac{\sqrt[nr]{a^{mr}}}{\sqrt[nr]{a^{nq}}} = \sqrt[nr]{\frac{a^{mr}}{a^{nq}}} = \sqrt[nr]{a^{mr-nq}} =$$

$$= a^{\frac{mr-nq}{nr}} = a^{\frac{mr}{nr} - \frac{nq}{nr}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{q}{r}}.$$

70. Prima di passare a discorrere delle quantità con esponenti negativi, non sarà qui fuori di posto, dopo le radici *irrazionali*, fare alcune osservazioni sulle radici *immaginarie*.

Abbiamo già visto che le radici di indice pari di quantità negative sono *immaginarie*, e che la loro formola generale era $\sqrt[2m]{-a^p}$; questa può anche trasformarsi nell' altra $\sqrt[2m]{-a^p} = \sqrt[2m]{-1 . a^p} = \sqrt[2m]{-1} . \sqrt[2m]{a^p}$, il

cui secondo fattore, essendo una radice *reale*, si può fare eguale alla quantità b; e perciò la espressione superiore diverrà $b\sqrt[2m]{-1}$.

Limitandoci a considerare il solo caso più semplice, quello cioè nel quale sia $m=1$, si avrà $b\sqrt{-1}$ che sarà la formola delle radici quadrate immaginarie.

La quantità $\sqrt{-1}$ che può essere positiva o negativa viene detta *unità immaginaria* (*), che tante volte viene indicata colle lettera i, la quale sarà perciò il simbolo delle quantità immaginarie.

Per eseguire la somma e la sottrazione delle quantità immaginarie si applica la stessa regola della riduzione dei termini simili.

$$4\sqrt{-1}+5\sqrt{-1}-7\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}=4\sqrt{-1}\ ;$$
$$a\sqrt{-1}-b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}=\{a-b+c\}\ .\ \sqrt{-1};$$
$$\{5\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}\}-\{8\sqrt{-1}-10\sqrt{-1}\}=9\sqrt{-1};$$
$$a.\sqrt{-1}-\{m\sqrt{-1}-n\sqrt{-1}\}=\{a-m+n\}\sqrt{-1}$$

Nella moltiplicazione e divisione delle quantità immaginarie giova osservare quali siano le diverse potenze di $\sqrt{-1}$.

Ricordando che la radice quadrata del quadrato di una quantità è la stessa quantità, perchè sulla medesima si dovrebbero eseguire due operazioni opposte che si distruggono vicendevolmente, si avrà
$\sqrt{a^2}=\sqrt{a}\,.\sqrt{a}=a,\ \sqrt{x^2}=\sqrt{x}\,.\sqrt{x}=x\,,$
$\sqrt{m^2}=\sqrt{m}.\sqrt{m}=m$; così si avrà pure
$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$; da questa relazione si ricaveranno evidentemente le seguenti eguaglianze:

(*) Vedi gli Elementi di Matematica di Riccardo Baltzer tradotti in italiano dal Prof. Cremona.

$$\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})^2=+1$$
$$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4.\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^7=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^8=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^4=+1$$

Da questa serie di potenze si vede che la potenza pari di $\sqrt{-1}$ è sempre ± 1, e la dispari è $\pm\sqrt{-1}$ onde la formola delle potenze pari sarà $(\sqrt{-1})^{2n}=\pm 1$, e quelle delle dispari $(\sqrt{-1})^{2n+1}=\pm\sqrt{-1}$, ove il segno $+$ corrisponde ad n pari, ed il segno $-$ ad n dispari.

Ciò posto si debbano moltiplicare insieme i tre fattori $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; $a\sqrt{-1}\,.\,b\sqrt{-1}\,.\,c\sqrt{-1}=abc.(\sqrt{-1})^3=-abc\sqrt{-1}$; così $a\sqrt{-1}\,.\,b\sqrt{-1}=-ab$.

Esempi

$$3\sqrt{-1}\,.\,4\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}\,.\,8\sqrt{-1}\,.\,2\sqrt{-1}=;$$
$$\frac{2\sqrt{-1}}{3}\,.\,\frac{3\sqrt{-1}}{2}\,.\,\frac{4\sqrt{-1}}{5}\,.\,\frac{5\sqrt{-1}}{4}=;$$
$$(\sqrt{-1})^{20}=;\ (\sqrt{-1})^{30}=;\ (\sqrt{-1})^{40}=;$$
$$(\sqrt{-1})^{48}=;\ (\sqrt{-1})^{100}=.$$

Passiamo alla divisione delle quantità immaginarie, ed abbiasi da dividere $8.bc.\sqrt{-1}$ per $4b\sqrt{-1}$; sarà $\frac{8bc\sqrt{-1}}{4b.\sqrt{-1}}=2c$; così pure $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}.\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

71. Non si deve qui passare senza osservazione il risultato che si è ottenuto in alcuni casi di moltiplicazione, o divisione di quantità immaginarie, le quali sono scomparse per ricomparire sotto le forme di quantità reali. Questo risultato si ottiene pure dal moltiplicare il binomio $a+b\sqrt{-1}$ per l'altro $a-b\sqrt{-1}$: infatti

$$\begin{array}{r} a+b\sqrt{-1} \\ a-b\sqrt{-1} \\ \hline a^2+ab\sqrt{-1} \qquad \\ -ab\sqrt{-1}+b^2 \\ \hline a^2+b^2 \qquad \end{array}$$

L' espressione $a\pm b\sqrt{-1}$ si chiama numero *complesso*, perchè è composta di quantità *reale*, e di quantità *immaginaria;* i due fattori $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ si dicono numeri *conjugati*, ed il loro prodotto a^2+b^2, che è reale, chiamasi la loro *norma.*

72. Nell' eseguire la divisione fra due diverse potenze di una medesima quantità, quando il grado del dividendo sia minore di quello del divisore, si ricava un quoziente con esponente negativo, dovendosi fare la differenza fra i due esponenti.

Così $\frac{x}{x^2}=x^{-1}, \frac{x^3}{x^5}=x^{-2}, \frac{x^{10}}{x^{15}}=x^{-5}, \frac{x^m}{x^{m+n}}=x^{-n}$

Potendo dunque avvenire di dovere calcolare quantità con esponenti negativi, sarà necessario conoscerne le relative regole. Dimostrerò qui che le regole già trovate pel calcolo delle quantità con esponenti positivi valgono pure pel calcolo delle quantità con esponenti negativi.

1.ª Nella moltiplicazione gli esponenti delle medesime lettere poste nei due fattori si sommano. Infatti abbiasi da moltiplicare a^m per a^{-n}: ricordando che una quantità con esponente negativo è uguale all' unità divisa per la stessa quantità col medesimo esponente positivo (n. 29), si potrà scrivere

$$a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} .$$

Egualmente moltiplicando a^{-m} per a^{-n} si avrà

$$a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n} .$$

2.ª Nella divisione gli esponenti delle medesime lettere poste nel dividendo e nel divisore si sottraggono. Invero $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n}$;

così pure $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

3.ª Per eseguire l' innalzamento a potenza di una quantità si moltiplica il grado della potenza per l' esponente della quantità medesima.

Difatti si avrà $\left(a^{-m}\right)^{n}=\left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$.

Così pure $\left(a^{m}\right)^{-n}=\frac{1}{(a^{m})^{n}}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}$.

Finalmente $\left(a^{-m}\right)^{-n}=\frac{1}{(a^{-m})^{n}}=\frac{1}{a^{-mn}}=a^{mn}$.

Esempi

$x^{3}\,.\,x^{-5}.x^{8}=\,;\; x^{a}\,.\,x^{-b}.x^{b}=\,;\; x^{2}\,.\,x^{5}\,.\,x^{-3}=\,;$

$\frac{x^{3}\,.\,x^{-5}}{x^{-8}.\,x^{2}}=\,;\quad \frac{x^{a}\,.\,x^{-b}}{x^{-c}}=\,;\quad \frac{x^{2}\,.\,x^{5}}{x^{-7}}=\,;$

$(x^{2}\,.\,x^{-3})^{3}=\,;\; \left\{\frac{x^{2}\,.\,x^{-4}}{y^{-3}.\;y^{-2}}\right\}^{-3}=\,;\; \left\{\frac{x^{2}\,.\,x^{-2}.\,x}{x^{-8}\,.\,x^{7}\,.\,x^{2}}\right\}^{-2}=.$

CAPITOLO III.

DELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

---

§. 1. Principi generali relativi alle equazioni.

75. Dicesi *equazione* una formola contenente una o più quantità *note* ed una o più quantità *incognite* o *indeterminate*, e composta di due parti che sono eguali soltanto per alcuni valori particolari delle medesime *indeterminate*. Le due parti eguali si chiamano i *membri* della equazione: la prima espressione si dice il *primo membro*, quella che è scritta dopo il segno =

dell' eguaglianza si denomina il *secondo membro*. Se i due membri dell' eguaglianza sono sempre eguali per qualsivoglia valore particolare attribuito alle *indeterminate*, la formola si chiama *identità* o *equazione identica*.

La formola $4x+3=11$ sarà un equazione, perchè i due membri non sono eguali che quando sia $x=2$, perchè in questo caso si ha $4.2+3=11$.

Così pure l' altra formola $x^2=9$ è un' equazione, perchè si verifica l' eguaglianza pei soli valori particolari di $x=3, x=-3$, o meglio $x=\pm 3$, poichè tanto nell' un caso che nell' altro si ha $3.3=+9, -3.(-3)=+9$.

La formola invece $3+x=x+3$ sarà un' *identità* o *equazione identica*, perchè i due membri sono sempre eguali, qualunque sia il valore della incognita x.

Sono pure *identità* le seguenti eguaglianze:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$(a-b)+(b-a)=0.$$

74. Un valore dell' incognita, il quale renda il primo membro eguale al secondo, dicesi *radice* dell' equazione.

L' equazione $4x+3=11$ diviene una identità $11=11$ pel valore dell' incognita $x=2$, dunque 2 è *radice* dell' equazione $4x+3=11$. *Risolvere* un' equazione rispetto all' incognita significa trovare le radici dell' equazione, ossia determinare quei valori dell' incognita che sostituiti in luogo della medesima incognita rendono *identici* i due membri: questa operazione per la ricerca delle radici si dirà dunque la *risoluzione* delle equazioni.

75. Due equazioni si dicono equivalenti, quando tutti i valori delle incognite che soddisfano all' una, rendono pure identici i due membri dell' altra e viceversa.

Sono equivalenti le due equazioni:

$$3x+2=11,\ 2x+4=10.$$

76. Da una data equazione si possono ricavare altre *equazioni equivalenti* coll' eseguire sui due membri della medesima alcune operazioni che vengono indicate dalle seguenti proposizioni.

Proposizione I.[a] *Se si aumentano o si diminuiscono di una stessa quantità i due membri di un' equazione, questa si trasforma in un' altra equazione equivalente.*

Infatti chiamati M e m i due membri di un equazione qualunque p. es. (1) $ax+b=cx+d$, se invece di x sostituiremo nell' equazione la sua radice, i due membri M e m diverranno due numeri eguali $M=m$; aggiungendo a due membri dell' equazione una medesima quantità k si avrà (2)$ax+b+k=cx+d+k$; i cui due membri diverranno pure due numeri eguali $M+k=m+k$, se nelle medesime sostituiremo alla x la primitiva radice: dunque le due equazioni (1) e (2) essendo soddisfatte dallo stesso valore delle x saranno *equivalenti.* Egualmente si potrebbe dimostrare che sottraendo dai due membri dell' equazione una stessa quantità l' equazione che ne risulta è equivalente alla prima.

Da questa proposizione si conclude:

1.° *Che in un' equazione si può trasportare un termine da un membro all' altro, purchè gli si cangi il segno.*

Se ai due membri dell' equazione $ax+b=c$ si aggiunge $-b$ si avrà $ax+b-b=c-b$, ossia $ax=c-b$,

così pure l' altra $x+a+m=c$ si trasformerà nella $x+a+m-a-m=c-a-m$, o meglio nell' altra $x=c-a-m$.

2.° *Si possono cambiare i segni di tutti i termini dell' equazione.*

Così l' equazione $a-c=m-x$ diverrà $x-m=c-a$.

Proposizione II.ª *Una equazione si cambia in un' altra equivalente se si moltiplicano o si dividono i suoi due membri per una stessa quantità, purchè questa non contenga la incognita.*

Infatti abbiasi l' equazione (2) $ax+b=cx+d$, la quale per la proposizione precedente si può anche scrivere $ax+b-cx-d=o$: chiamato P il primo membro, si avrà (2) $P=o$: moltiplichiamo quest' equazione per un fattore f il quale non contenga l' incognita, si avrà (3) $P.\,f=o$. Ora il valore della x che verifica l' equazione (2) verifica pure la (3), perchè quando P è nullo si annulla pure il prodotto $P.\,f$, e perciò le due equazioni (1) e (2) saranno equivalenti. Se poi l' equazione $P=o$ si moltiplica per un fattore k contenente l' incognita, allora l' equazione (4) $P.\,k=o$ può anche annullarsi per valori differenti dalla prima radice, i quali annullino il secondo fattore k, e perciò le due equazioni (2) e (4) non sono *equivalenti.*

Così se si avesse $x=3$, questa non è equivalente all' altra $x(x-2)=(x-2).3$, perchè quest' ultima si annulla anche per $x=2$.

Da questa proposizione si ricava:

1.° *Che il divisore di un membro di un' equazione si può trasportare moltiplicatore dell' altro membro e viceversa.*

Così moltiplicando ambi i membri dell' equazione $\frac{x+3}{5}=4$ pel numero 5, si avrà $5.\frac{x+3}{5}=4.5$, che diventa $x+3=4.5=20$.

Così l' altra $8x+4=10$ si cambierà nella equazione $2x+1=\frac{10}{4}$.

2.° *Che si possono far sparire i denominatori di un' equazione:*

Infatti abbiasi l' equazione $\frac{x}{a}+\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$: riducendo tutti i termini al comune denominatore acn si avrà $\frac{cnx}{acn}+\frac{abn}{acn}=\frac{acm}{acn}$, la quale moltiplicata per acn diverrà $cnx+abn=acm$.

Così l' equazione $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{a}{12}=\frac{m}{6}$ ridotta al minimo divisor comune si trasformerà nell' altra $\frac{6x}{12}+\frac{4x}{12}+\frac{2x}{12}+\frac{a}{12}=\frac{2m}{12}$, la quale moltiplicata per 12 diventa $6x+4x+2x+a=2m$.

Proposizione III.ª *I due membri di un' equazione rimangono eguali, se questi si elevano ad una medesima potenza, o se dai medesimi si estrae una stessa radice.*

Infatti, se si ha $x=3$, il fare il quadrato, il cubo o una potenza qualunque di questa equazione equivale a moltiplicare i due membri per quantità eguali, e perciò non viene alterata l' eguaglianza: si avrà dunque $x^2=9$, $x^3=27$, $x^m=3^m$.

Così pure l' estrarne una stessa radice dai due membri dell' equazione equivale a dividere i due mem-

bri per due quantità eguali, e perciò per questa operazione non verrà alterata l' equazione. Così $x^8=a^6$ diverrà $x^4=a^3$, od anche $x=\sqrt[4]{a^3}$.

77. Una quantità dicesi *dipendente* da altre quantità, con cui è connessa, se una variazione di queste produca una variazione nella prima. Le quantità, dalle quali un' altra dipende, diconsi *variabili*, mentre la quantità *dipendente* si chiama *funzione* delle *variabili*.

L' area di un rettangolo varia al variare delle due dimensioni, e perciò quest' area sarà una *funzione* di queste dimensioni: se queste si esprimono colle x e y, l' area sarà una *funzione* delle x e y; la quale funzione si suole scrivere coi simboli f (x,y), F (x,y), $\phi\,(x,y)$, ecc.

Così l' area di un cerchio di raggio $=x$ varia al variare del raggio x, e perciò quest' area sarà una *funzione* di x, la quale si potrà esprimere con f(x).

L' equazione $ax+b=c$ è un' espressione algebrica il cui valore dipende dalla variabile x, e quindi sarà una funzione della x.

Leibnitz chiamava *funzioni* tutti gli elementi relativi ad un punto di una curva, l' ascissa, l' ordinata, la tangente, la normale, etc.

Giovanni Bernoulli, nato a Basilea il 27 Luglio 1667, usò la parola *funzione* nel senso che le si attribuisce attualmente.

A Clairaut, nato a Parigi il 7 Maggio 1713, sembra che sia dovuta l' attuale notazione simbolica f(x).

Le funzioni possono essere *algebriche* o *trascendenti*. Le prime traggono la loro forma dalle sole sei operazioni dell' algebra elementare *addizione, sottrazione,*

moltiplicazione, divisione, innalzamento a potenza, estrazione di radice, e possono rappresentarsi sotto forma razionale o irrazionale, intera o frazionaria, come sarebbero le seguenti: $ax^2, a+b\sqrt[n]{x^m}, ax+b, \frac{ax+b}{mx+n}$. Le funzioni *trascendenti* sono quelle che contengono operazioni logaritmiche, esponenziali, trigonometriche, e quante altre somministra l' algebra superiore.

Sono funzioni trascendenti le qui notate:

$a+\text{Log}.x, a+c^x, m+\text{Sen}.x, arc. \text{Sen}.y$, ecc.

78. Egualmente le equazioni possono essere *algebriche* o *trascendenti* secondo la natura delle funzioni ivi contenute: saranno equazioni algebriche le seguenti.

$ax+b=c, x^2+px=q, x^m=a$; sono invece equazioni trascendenti queste altre

$a^x=m, \text{Log}.x=c, \text{Sen}.x=a, arc. \text{tang}.x=m.$

79. Le equazioni si distinguono pure secondo il *grado* e il numero delle incognite contenute. Se nella equazione vi è una sola incognita, il massimo esponente di questa ne stabilisce il *grado,* purche l' incognita non sia nei divisori o non abbia esponenti negativi, non sia sotto segni radicali o non abbia esponenti frazionari, e finalmente non sia moltiplicata per se stessa.

Sono di *primo grado* le equazioni

$x=a, ax=c, ax+b=cx+d, \frac{ax}{m}+b=x+\frac{c}{n}$.

Sono di *secondo grado* le equazioni

$$x^2=a, ax^2+b=cx^2+d, x^2+px=q, \frac{ax^2}{b}+x+\frac{c}{m}=$$
$$=\frac{dx}{n}+k$$

Sono di *terzo grado* le equazioni

$$ax^3+bx^2+cx=d, \ mx^3+nx=p, \ x^3=m$$

Sono di *grado* m^{esimo} le equazioni

$$ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\dots=o, \ x^m=a.$$

Prima di giudicare di qual grado siano le equazioni $\frac{a}{x}+mx=c$, $ax^{-2}+m=a+x$, $a+c\sqrt{x}=mx$, $x^{\frac{3}{4}}=a+x$ converrà liberarle dai denominatori, dagli esponenti negativi, dai radicali, e finalmente dagli esponenti frazionari.

Se l' equazione avrà due o più incognite, il grado è determinato o dal massimo esponente di una di esse, o dalla massima somma degli esponenti di ciascheduna quando si trovano moltiplicate tra loro, purchè si verifichino anche qui le precedenti condizioni.

Sono di *terzo grado* le equazioni

$$x^3+y^3=m, \ x^2y+x+y=m, \ x.y.z=k$$

Le equazioni si dicono poi *ad una, a due, a tre, ... a più incognite* secondochè contengono una, due, tre o più incognite.

§. 2. Risoluzione delle equazioni di primo grado ad un' incognita.

80. Abbiamo visto (n. 74) che la risoluzione di un' equazione è l' operazione che si deve fare per la ricerca dei valori delle incognite, i quali si chiamano anche *radici* dell' equazione: e perciò un' equazione ad un' incognita si dirà *risolta*, quando sarà trovato il valore dell' incognita, ossia sarà risolta l' equazione, quando in un membro vi sarà solo l' incognita, e nell' altro le altre quantità note.

81. Data una equazione di 1.° grado ad un' incognita, facile ne riescirà la risoluzione se si ricorderanno le tre proposizioni del paragrafo precedente (n. 76), mediante le quali si potrà ottenere che l' incognita si trovi nel primo membro *sola, positiva* e senza *coefficiente.*

La formola generale delle equazioni di 1.° grado è $a+bx=a'+b'x$, dove a, b, a', b' sono quantità date o note, ed x è l' incognita. Per trovare il valore di questa si trasportano i termini noti nel secondo membro ed i termini contenenti l' incognita nel primo coll' avvertenza di cambiare i segni dei termini trasportati: l' equazione generale diverrà $bx-b'x=a'-a$, la quale, avendo nel primo membro un fattore comune a' due termini, si potrà anche scrivere $(b-b').x=a'-a$. Poscia dividendo ambi i membri di questa equazione pel binomio $(b-b')$ che è il coefficiente dell' incognita, si avrà $x=\frac{a'-a}{b-b'}$. Questa equazione è *risolta*, perchè il primo membro, contenendo solamente l' incognita *positiva* e senza *coefficiente*, ci dà il valore della medesima, il quale sostituito nella formola generale in luogo

dell' incognita rende il primo membro eguale al secondo. Se, fatta la risoluzione, l' incognita riesce negativa, si moltiplica l' equazione per il fattore (-1): se si avesse $-x=k$, questa diverrebbe $x=-k$.

Vogliasi risolvere l' equazione $4+5x=10+2x$: si trasportino i termini noti nel secondo membro e i termini contenenti l' incognita nel primo colla già nota avvertenza ai segni: essa diverrà $5x-2x=10-4$ la quale, ridotti i termini simili, si cambia nell' altra $3x=6$. Poscia divisi ambi i membri pel coefficiente 3 dell' incognita, si otterrà $x=\frac{6}{3}=2$. Dunque la data equazione è sciolta, perchè si è trovato il valore dell' incognita. Questo valore sostituito in luogo della x nella proposta equazione ci darà una *identità*: invero fatta questa sostituzione si ha $4+5.2=10+2.2$, che ridotta diventa $14=14$.

Abbiasi a risolvere

$$1+3+x+10x=3+17+2x+5x.$$

Trasportando i soliti termini si avrà $x+10x-2x-5x=3+17-1-3$, che, fatta la riduzione dei termini simili, diventa $4x=16$, dalla quale si ha $x=\frac{16}{4}=4$.

Esempi

Le equazioni $a+ax+x=c$, $y+ay+by=m$, $a+b+c+az=b+c-a$ risolte divengono rispettivamente $x=\frac{c-a}{a+1}$, $y=\frac{m}{1+a+b}$, $z=-2$.

Risolvere le tre equazioni

$$1+2x+3+4x+5+6x=7+8x\ ;$$
$$a+bx+c+dx=e+fx+g\ ;$$
$$1+x+a+bx=m\ .$$

Dalla equazione $v=gt$ trovare il valore di t, e dall' altra $s=\frac{gt^2}{2}$ trovare il valore di g.

82. Nella equazione generale del n.° precedente può avvenire che alcune quantità note siano frazionarie: in questo caso prima di eseguire le operazioni già indicate, si debbono far sparire i denominatori (n. 76, propos. 2.ª).

Abbiasi da risolvere l' equazione $\frac{a}{b}+\frac{x}{d}=e+\frac{x}{h}$: riducendo al medesimo denominatore tutti i termini si avrà $\frac{adh}{bdh}+\frac{bhx}{bdh}=\frac{bdeh}{bdh}+\frac{bdx}{bdh}$, la quale moltiplicata per bdh si cambia nella $adh+bhx=bdeh+bdx$. Questa avendo la forma di un' equazione intera si scioglierà col metodo già visto al n.° precedente, e si avrà

$$x=\frac{bdeh-adh}{bh-bd}.$$

Si voglia risolvere l' equazione $\frac{3x}{2}+\frac{2}{3}=10+\frac{x}{5}$: si riducono tutti i termini al medesimo denominatore e si ha $\frac{45x}{30}+\frac{20}{30}=\frac{300}{30}+\frac{6x}{30}$, dalla quale si ricava $x=\frac{280}{39}$.

Poichè il denominatore comune a tutti i termini dell' equazione si può togliere senza alterarne l' eguaglianza, così gioverà avvertire che per brevità di calcolo, nella riduzione dei termini al medesimo denominatore, questo non si scrive.

L' equazione $\frac{3x}{2}+\frac{2}{3}=1-x$ diverrà dunque

$9x+4=6-6x$, dalla quale si ottiene $x=\frac{2}{15}$

Sarà utile per ultimo avvertire, che se nell' equazione vi sono due o più denominatori comuni, sarà più breve e più semplice il ridurre tutti i termini dell' equazione al minimo divisor comune.

Per questa osservazione è facile vedere che l' equazione $\frac{x}{2}+\frac{5}{4}=\frac{x}{8}-\frac{3}{16}$ si cambia nell' altra $8x+20=2x-3$.

83. Dalle cose dette nei due n.[i] precedenti, e dalle equazioni già risolte si deducono le seguenti quattro regole generali per risolvere un' equazione di 1.° grado ad un' incognita:

1.ª *Se vi sono denominatori, si fanno sparire coi metodi già accennati.*

2.ª *Si trasportano nel primo membro i termini contenenti l' incognita, nel secondo i termini noti, cambiando i segni ai termini trasportati: poscia si eseguiscono fra i termini simili le addizioni e sottrazioni indicate.*

3.ª *Se l' incognita si trova in termini dissimili, questa si pone per fattore comune agli stessi termini, i quali si scrivono fra parentesi.*

4.ª *Si dividono finalmente i due membri dell' equazione pel coefficiente dell' incognita.*

Vogliasi risolvere l' equazione

$\frac{3x}{2}+ax+5=\frac{2x}{3}-x+10$; questa equaziono mediante

la 1.ª regola diverrà $9.x+6.ax+30=4.x-6.x+60$
» 2.ª » » $11.x+6.ax=30$
» 3.ª » » $(11+6.a).x=30$
» 4.ª » » $x=\frac{30}{11+6.a}$.

Egualmente si hanno le seguenti trasformazioni sulla equazione $\frac{ax}{2}+x=5$

1.ª $ax+2x=10$
2.ª $(a+2).x=10$
3.ª $x=\frac{10}{a+2}$

Esempi

Risolvere le equazioni

$\frac{a.x}{b}=c$, $\frac{3x}{2}=3$, $\frac{a}{b}+x=\frac{x}{c}+a$;

$c=2\pi.x$, $a=\frac{h.x}{2}$, $\frac{a}{m}+\frac{x}{mn}=\frac{b}{mns}+\frac{x}{n}$;

$T=a+(n-1).x$, $S=\frac{a+x}{2}.n$,

$a+ax+1+x=10+c$.

§. 3. Risoluzione di problemi.

84. In algebra chiamasi problema quella proposizione nella quale è proposta la ricerca di una o più quantità incognite, le quali hanno date relazioni con altre quantità conosciute. Per risolvere questi problemi gli Algebristi hanno trovato un artificio che consiste nel tradurre in linguaggio algebrico mediante una o più equazioni l'enunciato del problema espresso con

parole, e nel trovare i valori delle incognite da queste equazioni.

85. La risoluzione di un problema richiede dunque due operazioni distinte, *l' impianto dell' equazione* cioè, e la sua *risoluzione.*

1.ª *Impianto dell' equazione.* Non vi sono regole generali al fine di porre un problema in equazione, ossia di esprimerlo mediante l' equazione; poichè questa, dovendo contenere le condizioni del problema, ossia le relazioni che devono esistere fra le quantità note e le incognite, potrà assumere molte forme e diverse, tutte dipendenti dalle varie condizioni che possono essere date in un problema.

Tuttavia se si esamina con cura l' enunciato di un problema si scorge quasi sempre che si tratta di rendere certe quantità eguali fra di loro, le quali espresse con termini algebrici ci daranno i due membri dell' equazione. Per esprimere queste quantità algebricamente giova ricordare che si rappresentano colle prime lettere dell' alfabeto le quantità note e colle ultime le quantità incognite, ricorrendo ai soliti metodi di indicazione per rappresentare le diverse operazioni, e condizioni accennate nell' enunciato del problema.

Oltre queste avvertenze saranno necessarie le seguenti due norme colle quali si dovrà procedere per arrivare all' impianto dell' equazione che rappresenta il problema:

a) Si deve analizzare l' enunciato del problema per conoscere chiaramente lo stato della questione proposta, per sapere distinguere le quantità note da ciò che si cerca, e per determinare i rapporti che legano l' incognita colle quantità note: perciò converrà spogliare l' enunciato del problema da tutto ciò che è

estraneo al medesimo e che non serve che a nascondere il vero stato della questione:

b) Si suppone sciolto il problema e già trovato il valore della incognita indicandola con una delle ultime lettere dell' alfabeto, e si esprimono algebricamente le condizioni del problema disponendo i termini in modo che ne nascono due espressioni diverse nella forma, ma equivalenti, come lo indicherà il problema medesimo.

2.ª *Risoluzione dell' equazione.* Eseguito l' impianto dell' equazione, ossia messo il problema in equazione sarà facile risolverlo, perchè non si avrà che risòlvere l' equazione, che lo rappresenta, mediante gli spiegati metodi di risoluzione.

86. Sebbene non vi siano regole generali per la risoluzione dei problemi, tuttavia lo scolaro non troverà difficoltà alcuna nell' impianto dei problemi, se alle avvertenze del n.º precedente vorrà aggiungere un lungo e continuato esercizio su svariati problemi.

A rendere meno arido e meno scabroso il cominciamento di queste esercitazioni, lo studente troverà qui vari problemi, dei quali alcuni saranno sciolti, altri saranno appena messi in equazione, e gli ultimi saranno soltanto enunciati.

Problema 1.º Si cerca un numero che moltiplicato per 3 dia 36 per prodotto.

Risoluzione. Si chiami x il richiesto numero: sarà facile tradurre in linguaggio algebrico questo enunciato: infatti si avrà

in linguaggio ordinario	in linguaggio algebrico
Si cerca un numero	x
che moltiplicato per tre	$3x$
dia	$=$
trentasei per prodotto	36

Dunque l' equazione esprimente il problema sarà $3.x=36$, dalla quale $x=\frac{36}{3}=12$: perciò il 12 è il numero cercato.

Problema 2.° Un cacciatore, vedendo sopra un ramo di una quercia alcune rondini, tira sulle medesime una fucilata, per la quale un terzo delle rondini vola via per spavento, un quarto per stordimento rimane sul ramo, e cinque cadono sul terreno per ferite riportate. Si domanda il numero totale delle rondini poste su quel ramo prima della fucilata.

Risoluzione. Si chiami x il numero cercato: sarà evidente la relazione fra questi due linguaggi

ordinario	algebrico
il terzo che vola via	$\frac{x}{3}$
più	$+$
il quarto che rimane	$\frac{x}{4}$
più	$+$
cinque che cadono	5
daranno	$=$
il numero totale	x

Ossia l' equazione esprimente il problema sarà $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+5=x$, che liberata dai divisori diventa $4x+3x+60=12.x$; dalla quale $x=\frac{60}{5}=12$. Dunque le rondini erano dodici.

Problema 3.° Nel R. Liceo Spallanzani di Reggio nell' Emilia nell' anno scolastico 1866-67 vi erano inscritti 53 scolari: si domanda quanti erano gli scolari in ciascuna delle tre classi, sapendosi che la prima e l' ultima avevano un numero eguale di scolari, e la seconda aveva quattro scolari meno di ciascuna delle altre due.

Impianto del problema. $x+x+x-4=53$.

Problema 4.° Un padre promette a suo figlio per incoraggiarlo nello studio dell' Algebra lire due per ogni problema che risolverebbe bene, colla condizione che gli restituisca il doppio per ogni problema risolto male: dopo avere lo scolaro risolti 25 problemi ricevette dal padre lire 20: si dimanda, quanti problemi sono stati sciolti bene, e quanti male.

Impianto del problema. $2x-4.(25-x)=20$

Problema 5.° Parte da Reggio verso Bologna un corriere colla velocità di 10 chilometri all' ora, quando un pedone colla velocità di 5 chilometri all' ora ha già percorso sulla medesima strada 20 chilometri. Si chiede dopo quante ore il corriere raggiungerà il pedone.

Risoluzione. Il corriere raggiungerà il pedone dopo quattro ore.

Problema 6.° Quanti alunni avrà un professore, che richiesto del numero dei medesimi disse: due quinti sono negligenti, la metà studia con poco profitto, e sei studiano con diligenza e molto profitto?

Problema 7.° Pitagora interrogato quanti scolari avesse rispose: una metà studia la matematica, un quarto la fisica, un settimo è composto di uditori ai quali debbonsi aggiungere tre donne distinte, che assistono in disparte alle mie lezioni. Quanti scolari aveva Pitagora?

Problema 8.° Sulla tomba di Diofanto si trova scritto, che passò il sesto degli anni suoi nell' infanzia e nell' adolescenza, un dodicesimo nella giovinezza; quindi si ammogliò, e in questa unione passò il settimo della sua vita aumentato di cinque anni prima di avere un figlio, al quale sopravisse quattro anni, e che non giunse che alla metà dell' età vissuta dal padre. Quanti anni visse Diofanto?

Problema 9.° L' anno in cui mori il sommo ed illustre Galileo Galilei viene espresso con quattro cifre, la cui somma è eguale a 13, la prima è eguale all' unità, la seconda è eguale alla terza aumentata di due unità, ed è pure eguale al triplo dell' ultima. Si domanda l' anno in cui mori Galileo.

Problema 10.° Delle dieci cifre 0, 1, 2,..... 9 quali sono le tre di seguito che formino un tal numero il quale accresciuto di 198 riproduce le stesse tre cifre disposte in ordine inverso? In questo problema, eseguito l' *impianto,* si ottiene invece dell' equazione una identità: da ciò che cosa si dovrà concludere?

Problema 11.° Una vasca vuota si empie col mezzo di un getto uniforme e costante in tre ore, piena si vuota pel mezzo di un foro nel fondo di essa in cinque

ore. Se quando è vuota si apra il getto e si lasci aperto il foro, dopo quanto tempo si troverà riempiuta?

Problema 12.° Trovare il perimetro del rettangolo, la cui area è eguale ad un ettare, e la cui base è due ettometri.

Problema 13.° Un giovane guardando dall' abbaino della propria casa tre gruppi di colombi che volavano rasente i tetti dei fabbricati osservò che se due colombi del terzo gruppo si unissero a quelli del primo, i tre gruppi rimarrebbero composti di egual numero di colombi; e se dei due primi gruppi se ne forma uno solo, questo diventa eguale al terzo. Quanti erano i colombi di ciascun gruppo?

Problema 14.° Un cane appena ha vista una lepre che è distante 90 metri, la insegue: supposto che il cane faccia venti salti per ogni minuto primo e la lepre ne faccia quaranta, dopo quanto tempo ed a qual distanza il cane raggiungerà la lepre, sapendosi che la lunghezza del salto del cane è eguale a metri 2,1 e quello della lepre 0, 9.

Problema 15.° In una fiala v' è ammoniaca: detratti venti grammi, il terzo del peso dell' ammoniaca rimanente è uguale al quinto del peso primitivo. Quale era il peso totale dell' ammoniaca.

§. 4. Risoluzione delle equazioni di 1.° grado a due o più incognite.

87. Se un' equazione contiene due o più incognite dicesi *indeterminata*, perchè ciascuna incognita può

assumere un numero infinito di valori, ed il problema rappresentato da una equazione indeterminata chiamasi esso pure *indeterminato.*

Se p. es. si cercassero due numeri tali che la loro somma sia eguale a 10, è evidenle che si avrebbe l' equazione $x+y=10$, avendo chiamati x, y i due numeri domandati. Ora sciolta l' equazione rispetto alla x si avrà $x=10-y$: nella quale dando alla y dei valori compresi tra i due limiti $-\infty, +\infty$ si scorge facilmente che avremo un numero infinito di valori della x, e perciò il problema è indeterminato.

Affinchè il problema sia *determinato,* è necessario che contenga tante condizioni quante sono le incognite, ossia che, tradotto in linguaggio algebrico, dia luogo a tante equazioni quante sono le incognite da determinarsi; vedremo in seguito che queste condizioni dovranno essere *distinte* e non *contraddittorie*, altrimenti il problema sarebbe o indeterminato od assurdo. Più che *determinati* diconsi poi que' problemi, nei quali il numero delle equazioni supera il numero delle incognite.

88. Ogni equazione di 1.° grado a due incognite si può ridurre alla forma $ax+by=c$, essendo a, b, c quantità note, x e y quantità incognite.

Sciolta questa equazione rispetto alla x si ha $x=\frac{c-by}{a}$, la quale evidentemente ammette un numero infinito di soluzioni, potendosi dare alla y un numero infinito di valori.

Se si hanno invece due equazioni distinte a due incognite, non si può più dare un valore arbitrario ad una delle incognite, poichè le due equazioni devono essere soddisfatte contemporaneamente dai valori di x e di y.

89. Un *sistema* di equazioni è l' insieme di più equazioni che devono essere soddisfatte ad un tempo dai medesimi valori delle incognite. Si dice che due *sistemi* di equazioni sono *equivalenti*, quando i valori delle incognite, che soddisfano all' uno e all' altro, sono i medesimi; oppure quando le equazioni di un sistema sono una conseguenza di quelle dell' altro.

Quando due sistemi sono equivalenti si possono sostituire l' uno all' altro.

90. Volendo cominciare la risoluzione di più equazioni a più incognite dal caso più semplice, supporremo di avere un sistema di due equazioni a due incognite e siano queste

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'.$$

In diverse maniere si giunge a determinare i valori delle due incognite x, e y; tutti i metodi però, che si conoscono, hanno per fine di fare in modo che dalle due equazioni contenenti le due incognite se ne possa ricavare una sola con una sola incognita, mediante la quale equazione si trova il valore di questa incognita: poscia si ricava facilmente anche il valore della seconda.

Con questi metodi si fanno dunque tali operazioni, colle quali vengono eliminate dalle formole alcune quantità: questi metodi perciò vengono detti in generale metodi di *eliminazione*.

91. I metodi ordinari per la risoluzione delle equazioni si possono ridurre a tre che sono i seguenti:

1.° *Metodo di confronto o paragone*;
2.° *Metodo di sostituzione;*
3.° *Metodo di addizione e sottrazione.*

92. *Metodo di confronto o paragone*. Per risolvere con questo metodo le due equazioni generali

$ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$ si comincia dal trovare da ciascuna equazione il valore di quella incognita che si vuole *eliminare*: sia p. es. questa la x: si avranno così le due equazioni $x=\frac{c-by}{a}$

$$x=\frac{c'-b'y}{a'} .$$

I due secondi membri di queste equazioni essendo eguali alla stessa quantità x, saranno eguali fra di loro, e quindi si avrà la nuova equazione $\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$, la quale risolta coi metodi già noti ci darà $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

Per ottenere col medesimo metodo il valore della x dalle due equazioni generali non si avrà che eliminare la y: si avranno le due equazioni

$y=\frac{c-ax}{b}$

$y=\frac{c'-a'x}{b'}$: le quali confrontate insieme ci daranno l' altra equazione $\frac{c-ax}{b}=\frac{c'-a'x}{b'}$: da questa facilmente si potrà ricavare $x=\frac{bc'-b'c}{a'b-ab'}$, che sarà il valore dell' altra incognita x.

Abbiasi il *sistema* delle due equazioni

$$3x+2y=16$$

$2x+\ y=\ 9$, le quali si vogliono risolvere collo stesso metodo di *confronto* o *paragone.*

Cominciando dall' eliminare la x si avranno le due equazioni

$$x=\frac{16-2y}{3}$$

$$x=\frac{9-y}{2},$$ le quali confrontate fra di loro ci portano

$$\frac{16-2y}{3}=\frac{9-y}{2},$$ dalla quale si ha $y=5$.

Se si fosse eliminata la y si sarebbe trovato $x=2$.

93. *Metodo di sostituzione.* Per applicare questo metodo alla risoluzione delle due equazioni generali $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$ si trova da una delle due equazioni il valore di quella incognita che si vuole eliminare: si trovi p. es. il valore della x dalla prima, si avrà $x=\frac{c-by}{a}$. Questo valore si sostituisce poscia invece della x nella seconda equazione: fatta questa sostituzione si avrà

$$a'.\frac{c-by}{a}+b'y=c',$$ la quale semplificata diventa

$$a'c-a'by+ab'y=ac',$$ da cui si ricava

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b},$$ valore identico a quello già trovato nel n.° precedente.

Se collo stesso metodo si volesse trovare il valore dell' altra incognita x, non si avrebbe che trovare il valore della y da una delle due equazioni generali, e questo valore sostituirlo nell' altra: si avrebbe così una sola equazione contenente la sola incognita x, della quale sarebbe facile trovare il valore.

Con questo medesimo metodo abbiansi da risolvere le due equazioni

$2x+3y=2$

$6x+12.y=7$. Cominciando dall' eliminare la x si avrà dalla prima $x=\frac{2-3y}{2}$: questo valore sostituito nella seconda invece della x ci darà

$6.\frac{2-3y}{2}+12.y=7$; o meglio

$12-18.y+24.y=14$: dalla quale si ricava $y=\frac{1}{3}$

Medesimamente si potrebbe trovare il valore della x eliminando l' incognita y.

94. *Metodo di addizione e sottrazione.* Vogliansi con questo metodo risolvere le due solite equazioni generali $ax+by=c$

$a'x+b'y=c'$: stabilito che si debba eliminare l' incognita x, si comincia dal moltiplicare la prima equazione pel coefficiente della x posta nella seconda; poscia si moltiplica la seconda equazione pel coefficiente della x che si trova nella prima: dopo queste due operazioni si avranno le altre due equazioni

$a'ax+a'by=a'c$

$a'ax+ab'y=ac'$: se dalla prima si leva la seconda si avrà $a'by-ab'y=a'c-ac'$, la quale risolta diventa

$$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}.$$

Egualmente si troverebbe il valore della x, facendo prima l' eliminazione dell' altra incognita y, moltiplicando cioè la prima equazione pel coefficiente della

y posta nella seconda, e moltiplicando pure la seconda pel coefficiente della y segnata nella prima equazione.

Se i termini, che diventano, dopo queste operazioni, identici avessero segno contrario, invece della sottrazione si dovrebbe eseguire l' addizione delle due equazioni.

Se p. es. si volesse con questo metodo eliminare l' incognita y dalle due equazioni

$4.x+5.y=21$

$2.x-3.y=5$, si avrebbero le due equazioni trasformate $12.x+15.y=63$

$10.x-15.y=25$, le quali sommate

ci danno $22.x=88$, da cui

$$x=\frac{88}{22}=4.$$

È pure degna di nota l' osservazione, che, se i due coefficienti delle incognite da eliminarsi avessero un fattor comune, non si debbono prendere per moltiplicatori rispettivi che i fattori non comuni ai due coefficienti.

$30.x-5y=15$

$42.x+2.y=48$. In queste due equazioni i due coefficienti dell' incognita x da eliminarsi hanno il fattor comune 6, e perciò sarà sufficiente di moltiplicare la prima equazione per 7, e la seconda per 5.

Infatti si avranno così le altre due

$210.x-35.y=105$

$210.x+10.y=240$: dalla seconda equazione sottratta la prima si avrà per risultato $45.y=135$, da cui

$$y=\frac{135}{45}=3.$$

95. Il primo metodo di *confronto o paragone* sebbene più semplice degli altri si deve impiegare di rado a motivo della sua lunghezza; il secondo di *sostituzione* presenta qualche vantaggio specialmente quando non tutte le incognite entrano in tutte le equazioni; il terzo metodo di *addizione* e *sottrazione* è più in uso perchè oltre di essere semplice, presenta brevi operazioni.

La forma speciale delle equazioni, ed una lunga pratica nella risoluzione delle medesime indicheranno ampiamente all' algebrista il metodo da adoprarsi, perchè l' operazione riesca piana, facile e breve. Tuttavia giova notare che trovato il valore di un' incognita con qualunque siasi metodo, può tornare utile qualche volta ricorrere al metodo di sostituzione per trovare il valore dell' altra incognita.

Ripigliando l' esempio del n.° precedente espresso nelle due equazioni
$30.x-5.y=15$
$42.x+2.y=48$, si era già trovato col terzo metodo il valore della $y=3$. Ora è facile vedere che per trovare il valore della x, non si ha che sostituire in una delle due date invece della y il suo valore 3: fatta questa sostituzione nella seconda si ricaverà

$$30.x-5.3=15, \text{ o meglio}$$
$$30.x=15+15=30, \text{ da cui}$$
$$x=\frac{30}{30}=1.$$

96. Passiamo ora alla risoluzione di tre equazioni a tre incognite.

I metodi di eliminazione impiegati nella risoluzione di due equazioni a due incognite si applicano facilmente alla risoluzione di tre equazioni a tre incognite.

Qualunque sia il metodo, che si adopra, si deve sempre operare in modo che eliminando una delle tre incognite risultino due equazioni a due incognite, sulle quali poscia si eseguiscono le operazioni imparate ai n.[i] precedenti.

Abbiansi le tre equazioni

$$ax+by+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$
$$a''x+b''y+c''z=d''.$$

Eliminiamo col terzo metodo di *addizione* l' incognita x fra la prima e la seconda equazione, e fra la seconda e la terza: si avranno così le due coppie di equazioni

$$aa'x+a'by+a'cz=a'd \qquad a'a''x+a''b'y+a''c'z=a''d'$$
$$aa'x+ab'y+ac'z=ad' \qquad a'a''x+a'b''y+a'c''z=a'd'',$$

dalle quali, eseguite le sottrazioni, si avranno le due equazioni a due incognite

$$a'by-ab'y+a'cz-ac'z=a'd-ad'$$
$$a''b'y-a'b''y+a''c'z-a'c''z=a''d'-a'd''.$$

Eliminata anche qui un' altra incognita, si arriverà ad una sola equazione con una sola incognita, della quale si potrà trovare il valore: con questo si ricaverà quello della seconda incognita e poscia quello della prima.

Troviamo il valore delle tre incognite x, y e z nel sistema delle tre equazioni

(1) $2x+3y-z=5$
(2) $3x-2y+3z=8$
(3) $x+4y-2z=3$

Col metodo di *addizione* si ottengono le due coppie di equazioni

(4) $6x+9y-3z=15$, (6) $3x-2y+3z=8$,
(5) $6x-4y+6z=16$, (7) $3x+12y-6z=9$;

dalla (4) sottratta la (5), e dalla (7) la (6) si avranno le altre due

$$(8)\ 13.y-9z=-1$$

$$(9)\ 14y-9z=1$$: fra queste fatta la differenza si ha (10) $y=2$.

Se invece della y si sostituisce il suo valore in una delle due (8) e (9), si avrà p. es. dalla (8) $13.2-9z=-1$, da cui fatte le riduzioni risulta $z=3$.

Finalmente sostituiti i valori delle due incognite y e z in una delle tre equazioni (1), (2) e (3) si avrà il valore dell' altra incognita x.

Prendendo p. es. la (3) si otterrà $x+4.2-2.3=3$, da cui si ha $x=1$. Dunque i tre valori delle tre incognite sono $x=1$; $y=2$; $z=3$. Questi tre valori sostituiti invece delle incognite nelle tre equazioni (1), (2) e (3) soddisferanno alle medesime equazioni, le quali si cambieranno in tre identità.

97. Egualmente si potrebbero trovare i valori delle incognite se il sistema contenesse quattro o più equazioni con quattro o più incognite, purchè si avverta che ad ogni volta che si elimina una incognita, vi debbono sempre restare tante equazioni quante sono le incognite che rimangono.

98. Presenteremo anche qui come nel paragrafo precedente alcuni problemi di 1.° grado, ma contenenti due o più incognite.

Problema 1.° Trovare due numeri tali, che la metà dell' uno accresciuta del terzo dell' altro faccia 6; e che il doppio di questo diminuito del quarto di quello faccia 23.

Soluzione: $x=4$, $y=12$.

Problema 2.° Trovare una frazione tale che se da ciascuno de' suoi termini si toglie l' unità, essa sia eguale $\frac{2}{3}$; se invece s' aggiunge l' unità al numeratore, e la si toglie dal denominatore si ha per risultato *uno*.

Impianto: $\frac{x-1}{y-1}=\frac{2}{3}$, $\frac{x+1}{y-1}=1$.

Problema 3.° Nel R. Istituto Industriale e Professionale di Reggio nell' Emilia nell' anno scolastico 1866-67 i giovani inscritti nelle due Sezioni di *Meccanica e Costruzione*, di *Agronomia e Agrimensura* erano 86, quelli inscritti nella terza Sezione di *Amministrazione e Ragioneria* erano eguali al numero di quelli inscritti nella prima Sezione diminuiti di 12, ed il triplo dei giovani della prima era eguale al numero totale dei giovani inscritti meno 4.

Quanti erano i giovani inscritti in ciascuna delle tre Sezioni?

Risolvere questo problema con due equazioni ovvero con una soltanto.

Problema 4.° Si ha un rettangolo di una data area: se si diminuisce la base di due metri, e si aumenta l' altezza di un metro l' area diminuisce di dieci metri: se invece si diminuisce l' altezza di due metri, e si aumenta la base di un metro, l' area rettangolare diminuisce di sedici metri.

Quali sono le dimensioni del rettangolo?

Problema 5.° Un mercante ha comprata della tela di tre qualità in tre diverse riprese. La prima volta

furono spese lire 170 per l' acquisto di metri 30 della 1.ª qualità, 40 della 2.ª, 50 della 3.ª La seconda volta furono pagate lire 300 per averne 100 metri della 1.ª qualità, 50 della 2.ª, e 25 della 3.ª Finalmente nell' ultimo contratto furono sborsate lire 165 per acquistarne 50 metri della 1.ª, 30 della 2.ª e 20 della 3.ª

Quanto importerà per ogni metro la tela di ciascuna qualità.

Problema 6.° Trovare un numero di due cifre, la cui somma assoluta è 9, e letto in ordine inverso è minore dell' altro di 9 unità.

Problema 7.° Uno studente chiedeva in iscuola al suo vicino quanto mancasse al termine della lezione, e ne ottenne in risposta che un terzo del tempo passato era eguale al tempo restante aumentato di sei minuti, e che questo era eguale ad un quinto del tempo della intera lezione.

Quale è la durata della lezione, e quanti minuti mancavano alla fine della medesima.

Problema 8.° In una strada circolare lunga due chilometri corrono due cavalli A e B: se il primo parte un minuto prima del secondo, è raggiunto da questo dopo 5 minuti: se invece il cavallo B, che è più veloce, parte un minuto prima di A, percorre la strada circolare e raggiunge questo dopo 16 minuti.

Si dimandano le velocità dei due cavalli.

Problema 9.° La data dell' invenzione della stampa dovuta a Guttemberg è espressa da un numero di

quattro cifre. La cifra delle unità è doppia di quella delle decine: l' eccesso della cifra delle centinaja su quelle delle decine uguaglia la cifra delle migliaja: di più la somma delle quattro cifre è uguale a 14, e se si aumenta questo numero di 4905 si trova per somma un numero formato dalle stesse cifre, ma scritte in ordine inverso.

Quale è questa data?

Problema 10.° Determinare il numero degli anni di ciascuno dei tre scolari A, B e C, sapendosi che l' età del primo accresciuta di quella del secondo e diminuita del doppio dell' età del terzo fa sette anni; che l' età del primo diminuita del doppio di quella del secondo, ed accresciuta dell' età del terzo fa un anno; e finalmente che il triplo dell' età del terzo diminuito di quella degli altri due dà per risultato tre anni.

99. Se si avessero n equazioni a n incognite, con uno dei tre metodi dei n.[i] precedenti si ridurrebbero ad $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite: e queste si ridurrebbero egualmente ad un sistema di $n-2$ equazioni a $n-2$ incognite, e così di seguito sino a che si arrivi ad una equazione con una sola incognita.

100. Ai tre metodi di eliminazione insegnati precedentemente giova qui aggiungerne un quarto, detto di Bezout (1), e che ben poco differisce da quello di addizione e sottrazione.

Abbiansi da risolvere con questo quarto metodo le tre equazioni

(1) Stefano Bezout distinto Matematico è nato a Nemours il 31 marzo 1730 ed è morto a Parigi il 27 settembre 1783.

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=k \\ a'x+b'y+c'z=k' \\ a''x+b''y+c''z=k''. \end{array}\right.$$

Moltiplichiamo la prima per una quantità indeterminata e arbitraria m e la seconda per un' altra quantità pure indeterminata e arbitraria n: si avrà così l' altro sistema di equazioni

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l} amx+bmy+cmz=km \\ a'nx+b'ny+c'nz=k'n \\ a''x+b''y+c''z=k'' \end{array}\right.$$

: fatta la somma di queste tre equazioni si avrà l' altra

$$(1)\ (am+a'n+a'')x+(bm+b'n+b'')y+(cm+c'n+c'')z =km+k'n+k''.$$

Ora essendo m, n due quantità arbitrarie, possiamo disporre di queste due quantità in modo da far scomparire dall' equazione (1) due delle tre incognite. Volendo p. es. fare scomparire le due incognite y e z, basterà determinare le indeterminate m e n in maniera che i coefficienti delle due medesime incognite nella (1) si riducano a zero, ossia che si abbiano le due equazioni di condizione

$$(2)\left\{\begin{array}{l} bm+b'n+b''=0 \\ cm+c'n+c''=0. \end{array}\right.$$

Per queste condizioni l' equazione (1) si ridurrà alla

$$(3)\ (am+a'n+a'')x=km+k'n+k'',$$

che ha una sola incognita, il cui valore si troverà se nella medesima equazione invece delle indeterminate m e n si sostituiscono i loro valori dedotti dalle equazioni (2). Infatti da queste (2) con uno dei tre metodi ordinari (oppure anche con questo stesso del Bezout) si trova

$$m = \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c}$$

$$n = \frac{b''c - bc''}{bc' - b'c}$$. Questi valori si sostituiscono nella (3), e si avrà

$$\left\{ a . \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c} + a' . \frac{b''c - bc''}{bc' - b'c} + a'' \right\} x = k . \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c}$$

$$+ k' . \frac{b''c - bc''}{bc' - b'c} + k''$$, dalla quale si ricava

$$x = \frac{kb'c'' - kb''c' + k'b''c - k'bc'' + k''bc' - k''b'c}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}.$$

Egualmente si potrebbero trovare i valori delle altre due incognite y, z.

Per evitare però la ripetizione di questo lungo calcolo è utile sapere che trovato il valore di x si otterrà subito quello di y con cangiare le a nei b ed i b nelle a; e quello di z cangiando le a nei c e viceversa: ottenuti questi due valori giova cangiare i segni ai numeratori ed ai denominatori per dare a questi la stessa forma del denominatore del valore di x.

101. Applichiamo il *metodo* di Bezout alla risoluzione delle due equazioni

$$(a) \begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$: moltiplicando la prima per l' indeterminata q si avrà

$3.qx + q.y = 13q$, che sommata colla seconda $2x + 3y = 18$ ci darà per risultato

(b) $(3q+2).x + (q+3).y = 13q + 18$: volendo p. es, eliminare in quest' ultima l' incognita y

faremo $q+3=0$, da cui $q=-3$. Sostituito nella (*b*) invece di q il suo valore si avrà
(*c*) $\{3.(-3)+2\}.x=13.(-3)+18$, che ridotta, e sciolta ci dà $x=3$.

Egualmente si potrebbe operare per rispetto al valore dell' altra incognita y.

102. Se si avranno r equazioni ad r incognite, per eliminare con questo quarto metodo contemporaneamente $r-1$ incognite, si moltiplicherà ciascuna delle r equazioni meno *una* per quantità indeterminate: poscia queste ultime equazioni, e l' altra, che non è stata moltiplicata per alcuna quantità indeterminata, si sommano insieme; si formerà per tal modo un' equazione contenente le r incognite, la quale però si ridurrà ad una sola incognita, purchè si diano alle $r-1$ quantità indeterminate tali valori che annullino i coefficienti d' altrettante incognite. Per trovare i valori convenienti delle indeterminate, basta eguagliare a zero, come si è operato al n.° precedente, i coefficienti delle $r-1$ incognite che si vogliono eliminare: con queste condizioni si ottengono $r-1$ equazioni colle quali si potranno determinare le $r-1$ indeterminate.

§. 5. Discussione delle formole di risoluzione delle equazioni di 1.° grado.

103. Ripigliamo l' equazione generale (n.° 81) della equazione di primo grado ad una sola incognita. Essa è espressa dalla
(1) $a+bx=a'+b'x$, e la relativa formula di risoluzione dalla
(2) $x=\dfrac{a'-a}{b-b'}$. Vi sono qui da esaminare due casi

distinti; il primo cioè quando il denominatore è nullo senza che lo sia il numeratore, ed il secondo quando sono nulli entrambi i termini della frazione.

1.° *caso*. Sia $b-b'=0$, e sia $a'-a$ maggiore o minore di zero.

L' equazione (2) diverrà

(3) $x=\frac{a'-a}{0}$, la quale da sola non esprime niente, ma confrontata colla (1) che diventa $a+bx=a'+bx$, per essere $b=b'$ ci dice che l' equazione (1) proposta è impossibile se a é differente da a'.

2.° *caso*. Si abbia contemporaneamente $b-b'=0$, $a'-a=0$, ossia $b=b'$, $a=a'$, la formola (2) di risoluzione si cambierà nella

(4) $x=\frac{0}{0}$, la quale da sola non esprime niente, ma messa a confronto colla (1) che diventa $a+bx=a+bx$, ci avverte che la (1) è verificata qualunque sia il valore della x, essendosi questa equazione cambiata in una identità.

104. Quando la formola di risoluzione di un' equazione di 1.° grado ad un' incognita dà, per valore di questa incognita, un' espressione della forma $\frac{m}{0}$, si concluderà dunque che l' equazione è impossibile: e se il valore di questa incognita verrà espresso colla forma $\frac{0}{0}$ si dirà invece che l' equazione è indeterminata: più avanti al n.° **110** vedremo che il simbolo $\frac{0}{0}$ non indica sempre indeterminazione. Giova anche

ricordare (n.° 39) che quando il denominatore di una frazione diminuisce indefinitamente e si avvicina continuamente allo zero, la frazione cresce indefinitamente e si avvicina continuamente allo infinito, e se il denominatore si annulla, ossia diventa zero, si usa dire, benchè impropriamente, che la frazione diviene infinita, ossia il suo valore $=\infty$. Per queste osservazioni la formola di risoluzione $x=\frac{m}{0}$, oltre di avvertirci che l' equazione primitiva è impossibile, ci fa vedere ancora, che il problema rappresentato dalla medesima equazione contiene un' incognita, il cui valore è infinito. Un esempio luminoso si ha in Geometria *analitica,* quando date le equazioni di due rette parallele si volesse cercare a qual distanza si trova il loro punto d' incontro: fatto il calcolo questa distanza verrebbe data da una espressione della forma $\frac{m}{0}$, che si interpreta, che le rette si incontrano ad una distanza infinita, o meglio che sono parallele.

105. Passiamo ora alle formole trovate per la risoluzione di due equazioni di 1.° grado a due incognite.

Queste formole generali (n.° 92) sono espresse dalle

$$(1)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

le quali risolte ci danno le già trovate formole di risoluzione

$$(2)\ \begin{cases} x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-a'b} \\[2ex] y=\dfrac{ac'-ca'}{ab'-a'b} \end{cases}$$

Prima di passare alla discussione

di queste due equazioni, non è inutile il qui avvertire come siano formati i valori di queste due incognite al fine di ritenerli più facilmente. Prima di tutto hanno per denominatore comune $ab'-a'b$ che è la differenza dei prodotti che si ottengono moltiplicando in croce i coefficienti delle due incognite nelle due equazioni (1): per formare il numeratore del valore di x bisogna sostituire nella espressione del denominatore $ab'-a'b$ invece dei coefficienti a, a' della x i termini noti c e c'; e per formare il numeratore del valore di y si deve sostituire nella medesima espressione invece dei coefficienti b, b' della y medesimamente i termini noti c e c'.

106. Ritornando ora alle due formole (2) di risoluzione supponiamo che il denominatore comune sia nullo, ma non siano nulli i due numeratori; i due valori delle incognite vengono allora espressi dalle forme speciali

$$(3)\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{k}{0} \\ \\ y=\dfrac{k'}{0} \end{array}\right.$$

, le quali, mentre da loro non esprimono niente, come abbiamo visto precedentemente, confrontate colle generali (1) ci indicano che queste sono incompatibili o contradditorie.

Infatti essendo il denominatore eguale allo zero, sarà $ab'-a'b=0$, ossia $ab'=a'b$, da cui $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$; indichiamo con q il valore comune di questi due rapporti, avremo le eguaglianze $\dfrac{a}{a'}=q$, $\dfrac{b}{b'}=q$;

ovvero $a=a'q$, $b=b'q$: sostituiti questi valori nelle equazioni (1) generali, avremo le altre due

$$(4)\ \begin{cases} a'qx+b'qy=c, \\ a'x+b'y=c'. \end{cases}$$

In queste due equazioni il primo membro della prima essendo eguale al primo membro della seconda moltiplicata per q, dovrebbe pure il secondo membro della prima essere eguale al secondo membro della seconda moltiplicato per la stessa quantità q; e si avrebbe perciò dalle (4)

$$c=qc',$$

e sostituendo in questa equazione invece di q i suoi valori superiori si otterranno le due equazioni

$$c=\frac{a}{a'}\cdot c', \quad c=\frac{b}{b'}\cdot c',$$ che si cambiano nelle due (5) $ac'=a'c$, $b'c=bc'$. Ora avendo supposto che i numeratori delle formole di risoluzione (2) non sono nulli, è evidente che le due equazioni (5) non possono verificarsi, e le equazioni generali sono incompatibili.

107. Abbiansi da risolvere le due equazioni

$$x+y=5$$
$$2x+2y=3;$$

evidentemente queste equazioni sono incompatibili, perchè mentre il primo membro della prima è eguale a 5, lo stesso primo membro raddoppiato dovrebbe essere eguale a 3: supposto che lo scolaro, non accorgendosi di questa incompatibilità, sciogliesse le equazioni, egli troverebbe

$$x=\frac{7}{0}, \quad y=\frac{7}{0},$$ e queste formole lo av-

vertirebbero che le proposte equazioni da risolvere erano incompatibili.

108. Esaminiamo ora il caso, in cui oltre di essere nullo il denominatore comune delle formole di risoluzione (2), sia anche nullo uno dei due numeratori: fatta questa ipotesi dimostrerò qui che anche l' altro numeratore si annulla egualmente.

Invero abbiansi le due ipotesi
il denominatore eguale allo zero $ab'-a'b=0$
uno dei numeratori » » » $ac'-ca'=0$, dalle

quali si ottengono le altre due $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$,

le quali confrontate ci danno l' altra

$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ovvero $bc'=b'c$, da cui

$bc'-b'c=0$: dove si legge che anche l' altro numeratore è nullo per le ipotesi fatte.

Per queste supposizioni i valori delle due incognite sono espressi dalle formole $x=\frac{0}{0}$ $y=\frac{0}{0}$, delle quali cercheremo qui il significato. Per avere supposto in questo caso che il denominatore comune delle formole (2) di risoluzione sia nullo, e sia pure nullo uno dei due numeratori delle medesime si hanno i tre rapporti eguali

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, i quali, fatti eguali alla

quantità q ci danno le tre equazioni

$a=a'q$, $b=b'q$, $c=c'q$: sostituiti questi valori nelle due (1) proposte generali si avranno le altre due

$$a'qx+b'qy=c'q\,,$$
$$a'x+b'y=c'\,.$$

La prima di queste due non è altro che la seconda, i cui due membri sono moltiplicati per q: perciò invece di avere due equazioni se ne ha una sola con due incognite, e quindi la forma $\frac{0}{0}$ indicherà in generale una indeterminazione del problema rappresentato dalle due equazioni.

109. Vogliansi risolvere le due equazioni

$$3x+2y=13\,,$$
$$6x+4y=26\,,$$ le quali evidentemente non rappresentano che una sola equazione indeterminata. Con uno dei metodi noti fatta la risoluzione si ottiene $y=\frac{0}{0}$, $x=\frac{0}{0}$.

110. Giova però avvertire che non sempre il simbolo $\frac{0}{0}$ esprime indeterminazione, poichè potrebbe accadere qualche volta che un fattore comune ai due termini di una frazione diventasse eguale allo zero per condizioni speciali del problema, e cangiasse così la frazione nella forma $\frac{0}{0}$. Così p. es. nell' espressione $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, se per condizioni del problema deve essere $a=b$, il valore di x diventa $\frac{0}{0}$: ma poichè $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, l'espressione superiore diventerà

$x = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b}$, la quale, liberata dal fattor comune $a-b$, prima di fare $a=b$, diverrà $x=2a$.

111. Riassumendo quindi i due casi ora analizzati concluderemo che quando le formole di risoluzione (1) danno per le incognite espressioni della forma $\frac{k}{0}$, le equazioni sono incompatibili, e quando le danno della forma $\frac{0}{0}$ rappresentano una indeterminazione, purchè in quest' ultimo caso si abbia l' avvertenza di togliere prima quei fattori comuni, se pure ve ne sono, che potessero produrre lo stesso simbolo $\frac{0}{0}$.

112. Nel parlare della risoluzione delle equazioni di 1.° grado a due o più incognite abbiamo visto che è necessario che il problema, affinchè sia generalmente solubile o determinato, contenga tante condizioni quante sono le incognite, ed abbiamo soggiunto che queste condizioni debbono essere *distinte* e non *contradditorie:* ora è facile vedere dalle osservazioni e dagli esempi fatti ai n.ⁱ precedenti che se le condizioni non fossero *distinte,* le equazioni si confonderebbero in una sola con più incognite ed il problema sarebbe indeterminato: se poi le condizioni fossero *contradditorie,* le relative equazioni sarebbero incompatibili, e quindi il problema sarebbe assurdo.

113. Passiamo a considerare tre equazioni di 1.° grado a tre incognite, e limitiamo le nostre osservazioni al modo col quale sono formati i valori delle *indeterminate* introdotte col metodo di Bezout, ed i valori delle incognite nelle formole di risoluzione.

Le equazioni generali erano

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} ax+by+cz=k\,, \\ a'x+b'y+c'z=k'\,, \\ a''x+b''y+c''z=k'': \end{array} \right.$$

ed i valori delle due indeterminate m, n introdotte per eliminare y, z erano espresse dalle (n.° **100**)

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{l} m=\dfrac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}\,, \\ \\ n=\dfrac{b''c-bc''}{bc'-b'c}\,. \end{array} \right.$$

Esaminando queste due ultime equazioni, vediamo che il numeratore del valore della m è la differenza dei prodotti ottenuti moltiplicando in croce i coefficienti delle due incognite da eliminarsi e poste nelle due ultime equazioni: il numeratore del valore della n è egualmente la differenza dei prodotti ottenuti moltiplicando in croce i coefficienti delle due incognite da eliminarsi e poste nella prima equazione e nell' ultima, ed il denominatore comune ai due valori delle indeterminate è la differenza dei prodotti che risultano dal moltiplicare medesimamente in croce i coefficienti delle due incognite da eliminarsi, e poste nelle due prime equazioni.

Nel sistema delle tre equazioni

$$\begin{array}{l} 2x-2y+3z=10 \\ 3x+y+2z=13 \\ x+2y+z=9 \end{array}$$

volendo eliminare le due incognite y, z si trovano i valori delle due indeterminate

$$m=\frac{1-4}{-4-3}=\frac{-3}{-7}=\frac{3}{7}$$

$n=\frac{6+2}{-4-3}=\frac{8}{-7}=-\frac{8}{7}$; moltiplicando perciò la prima per $\frac{3}{7}$, e la seconda per $-\frac{8}{7}$, e sommando i due prodotti con l' ultima, restano eliminate le due incognite y, z.

Finalmente vediamo quali siano le forme speciali colle quali vengono espressi i valori delle incognite x, y, z delle tre equazioni generali.

Analizzando i valori (n.° 100) delle incognite

$$x=\frac{kb'c''-kb''c'+k'b''c-k'bc''+k''bc'+k''b'c}{ab'c''-ac'b''+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$y=\frac{ac''k'-ac'k''+a'ck''-a'c''k+a''c'k-a''ck'}{ab'c''-ac'b''+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$z=\frac{ab'k''-ab''k'+a'b''k-a'bk''+a''bk'-a''b'k}{ab'c''-ac'b''+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

si vede che i denominatori sono eguali fra di loro e si formano col moltiplicare ciascuno dei coefficienti della x posti nella 1.ª, 2.ª e 3.ª equazione rispettivamente per ciascuna differenza dei prodotti che si ottengono moltiplicando in croce i coefficienti delle altre due incognite poste nelle due ultime equazioni, poi di quelle scritte nella prima e nell' ultima, e finalmente di quelle che si trovano nelle due prime avvertendo però che la prima e la terza differenza si trovano col cominciare le moltiplicazioni del primo dei due coefficienti posti nella prima delle due equazioni

considerate, invece la seconda si ricava col cominciare dal secondo. Infine i numeratori si deducono dal denominatore, ponendo, in luogo dei coefficienti della incognita da determinarsi, i termini tutti noti, cioè ponendo k, k', k'' invece di a, a', a'' per il valore di x, invece di b, b', b'' per quello di q, e invece di c, c', c'' per quello di z.

Gli studiosi potranno consultare le *Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi* nell' anno 1771, dove troveranno la regola e la relativa dimostrazione che ne dà il LAPLACE per la ricerca dei valori delle incognite in un sistema di equazioni a più incognite. Merita pure di essere studiato il COSSALI il quale tratta dei diversi metodi di eliminazione facendone il confronto fra gli antichi e i moderni, e parla degli Autori di ciascun metodo.

PIETRO SIMONE LAPLACE nacque a Beaumont-en-Auge il 23 marzo 1749, e morì a Parigi il 5 marzo 1827.

PIETRO COSSALI pubblicò un' opera importantissima intitolata *Origine*, *Trasporto in Italia*, *Primi progressi in essa* dell' algebra: e BALDASSARE BONCOMPAGNI pubblicò a Roma nel 1857 col mezzo della *Tipografia delle belle arti* in un grosso ed elegante volume gli scritti inediti di PIETRO COSSALI seguiti da una appendice contenente quattro lettere dirette al medesimo COSSALI ed una nota intorno a queste lettere.

114. Facciamo un' applicazione delle regole date per trovare le formole di risoluzione nelle tre equazioni a tre incognite.

Abbiansi le tre equazioni

$2x+y+3z=15$,

$x+2y+2z=12$,

$3x+2y+z=13$; il denominatore comune delle formole

di risoluzione si forma moltiplicando ciascun coefficiente 2, 1, 3 della x rispettivamente per le differenze dei prodotti che si ottengono col moltiplicare in croce i coefficienti delle altre incognite poste nelle due ultime equazioni; poi di quelle scritte nella prima e nell' ultima, e finalmente di quelle poste nelle due prime: questo denominatore sarà dunque

$D = 2.(2.1 - 2.2) + 1.(2.3 - 1.1) + 3(1.2 - 2.3)$: per avere poi il numeratore del valore di x si dovranno sostituire nel denominatore invece dei coefficienti 2, 1, 3 i termini noti 15, 12, 13; e si avrà

$N = 15.(2.1 - 2.2) + 12.(2.3 - 1.1) + 13.(1.2 - 2.3)$: per trovare lo stesso numeratore del valore della y si dovranno sostituire i termini noti 15, 12, 13 invece dei coefficienti della y che sono 1, 2, 2: si avrà così

$N' = 2.(12.1 - 13.2) + 1.(13.3 - 15.1) + 3.(15.2 - 12.3)$; e finalmente per trovare quello della z si dovranno egualmente sostituire in luogo dei coefficienti 3, 2, 1 della z i termini noti 15, 12, 13: si avrà così

$N'' = 2.(2.13 - 2.12) + 1.(2.15 - 1.13) + 3(1.12 - 2.15)$.

Fatte le riduzioni si avrà

$D = 4 - 8 + 6 - 1 + 6 - 18 = 16 - 27 = -11$,
$N = 30 - 60 + 72 - 12 + 26 - 78 = -22$,
$N' = 24 - 52 + 39 - 15 + 90 - 108 = -22$,
$N'' = 52 - 48 + 30 - 13 + 36 - 90 = -33$,

e perciò sarà

$$x = \frac{N}{D} = \frac{-22}{-11} = 2,$$

$$y = \frac{N'}{D} = \frac{-22}{-11} = 2,$$

$$z = \frac{N''}{D} = \frac{-33}{-11} = 3.$$ Questi sono i valori ricercati, e si vede che soddisfano alle equazioni date, perchè esse si cambiano in tre identità, se invece delle incognite vi si sostituiscono i valori trovati.

115. Metteremo qui alcuni problemi che conducono a casi d' indeterminazione o di impossibilità.

Problema 1.° Un professore dimanda ad uno scolare quanti anni egli abbia, e quale sia l' età di suo padre; lo studente risponde: la mia età è un terzo di quella di mio padre, il quale poi ha un' età tripla della mia.

Problema 2.° Trovare l' area di un rettangolo, la cui superficie diminuisce di 10 metri, se ciascun lato si diminuisce di un metro; e diminuisce invece di 5 metri se da ciascun lato si tolgono due metri.

Problema 3.° Trovare una frazione che aggiunta al numero 3 faccia $\frac{12}{3}$. Questo problema non contenendo che una condizione sarà indeterminato?

116. Prima di terminare questo paragrafo sulla discussione delle formole di risoluzione occorre di fare alcune osservazioni su qualche risultato speciale, al quale si arriva in alcuni casi nel risolvere problemi

algebrici. Nella ricerca delle incognite dimandate in un proposto problema avviene qualche volta che si trova per valore di una incognita una quantità negativa, e poichè questa non esprime alcuna grandezza, perchè anzi ne esprime la negazione, così sembrerebbe che queste soluzioni negative dovessero essere rigettate, e considerate come simboli d' impossibilità. Diffatti se, date certe condizioni, si dimandasse quale è il credito di Tizio, e sciolto il problema si trovasse $x = -3000$, è evidente che questa soluzione negativa ci dice che il problema è assurdo, perchè si dimanda di conoscere un credito che non esiste, e quindi si chiede un' impossibilità. Tuttavia prima di trascurare assolutamente questa soluzione negativa sarà necessario fare seria attenzione al modo col quale è stato enunciato il problema, poichè può avvenire che il problema espresso sotto altra forma ci dia il significato di quella soluzione negativa: se p. es. invece di dimandare il credito di Tizio, fosse chiesto: date certe condizioni di quanto Tizio è creditore o debitore? evidentemente a questa dimanda si risponderebbe: è debitore di 3000.

Consideriamo ancora l' equazione di primo grado ad una incognita

$$(m) \quad a + bx = a' + b'x,$$

dalla quale si ha

$$x = \frac{a' - a}{b - b'} .$$

Supponiamo che il valore di x sia negativo e si abbia $x = -k$; questo sostituito nella equazione generale la trasformerà nella identità

(n) $a+b(-k)=a'+b'(-k)$: questo risultato si otterrebbe egualmente se nella (m) si cambia x in $-x$, e poscia vi si metta invece di x il valore superiore ma preso positivamente, ossia k invece di $-k$. Si avrebbero così le due altre equazioni

(m') $a-bx=a'-b'x$,

(n') $a-bk=a'-b'k$: evidentemente questa ultima è identica alla (n). Da questo confronto possiamo concludere che ogni soluzione negativa di una equazione di primo grado a una incognita, presa positivamente, soddisfa a una equazione che si ottiene, cangiando nella prima il segno dei termini che contengono l' incognita.

Ora avviene spesso, che cambiati i segni ai termini contenenti l' incognita, la nuova equazione, che ne risulta, corrisponde a un problema poco differente dal proposto, e qualche volta corrisponde a questo stesso problema inteso in senso più generale. Da queste conclusioni ricavate dalla equazione generale di 1.° grado ad una incognita, e dall' esempio particolare precedente si vede che le soluzioni negative possono ricevere qualche volta interpretazioni importanti, che noi qui studieremo nei seguenti diversi problemi.

Problema 1.° Un padre ha p anni, e suo figlio ha f anni, dopo quanto tempo l' età del padre sarà doppia di quella del figlio?

Se x è il tempo cercato, l' equazione del problema sarà

$$(1)\quad p+x=2(f+x),$$

dalla quale si deduce (2) $x=p-2f$.

Se p è minore di $2f$, il valore di x è negativo: il che significa che se chiamiamo positivo il tempo av-

venire, il valore negativo di x rappresenterà un tempo passato, ed il problema doveva essere espresso sotto l' altra forma: *un padre ha p anni, e suo figlio ha f anni, quanti anni sono trascorsi da che l' età del padre era doppia di quella del figlio?* l' equazione di questo problema sarebbe

$$(3)\ p-x=2(f-x),$$

da cui si ha (4) $x=2f-p$, quantità positiva.

Queste due ultime equazioni si potevano ricavare dalla (1) cambiando la x in $-x$.

Problema 2.° Ripetiamo il precedente quesito, supponendo che il padre abbia 43 anni, ed il figlio 22 e si domandi dopo quanti anni l' età del padre sarà doppia di quella del figlio.

L' equazione del problema sarà

$$43+x=2.\ (22+x),$$

dalla quale si ottiene

$$x=-1.$$

Anche qui si potrebbero fare le medesime osservazioni fatte nel quesito generale.

Da queste due soluzioni del problema dato si vede che il valore negativo dell' incognita oltre di significare che l' enunciato del problema era impropriamente espresso, perchè vi si doveva domandare non un tempo avvenire, ma un tempo trascorso, ci dice ancora quanto sia questo tempo trascorso, purchè si cambi il segno all' incognita nell' equazione.

Problema 3.° Due giovani A, B amanti dello studio leggono giornalmente una determinata parte di volume di una qualsiasi importante opera.

Il primo ha 70 libri di Autori di scienze fisiche e matematiche, p. es. Euclide, Archimede, Commandino, Galilei, Cavalieri, Newton, Leibnitz, Eulero, Lagrangia, Plana, ecc. e legge giornalmente $\frac{1}{4}$ di libro.

Il secondo ha 50 libri di altri autori, p. es. Dante, Tasso, Guicciardini, Botta, Giusti, Gioberti, etc. e legge giornalmente $\frac{1}{6}$ di libro.

Sapendosi che i due giovani hanno terminato di leggere tutti i loro libri in un medesimo giorno, si dimanda: il giovane A quanti giorni prima dell' altro B ha cominciato a leggere i suoi libri? Chiamato x il numero di questi giorni scorsi prima che il secondo incominci la lettura, si avrà l' equazione

(1) $x=4.70-6.50$,
da cui (2) $x=-20$.

Il problema dunque è insolubile, perchè il risultato finale è negativo: ma fatta nella (1) la x negativa si otterrà l' altra (3) $x=6.50-4.70=20$. Questa ci dice che il problema è solubile, ma colla sua forma ci avverte ancora che la dimanda superiore deve essere cambiata nell' altra: *il giovane* B *quanti giorni prima dell' altro ha cominciato a leggere i suoi libri*. Ma anche il risultato $x=-20$ può direttamente dare la soluzione coll' avvertire che avendo chiamato x il numero dei giorni trascorsi, la *x negativa* rappresenterà il numero dei giorni da trascorrere.

Problema 4.° Sulla strada ferrata *Firenze - Arezzo - Roma* lunga 372 chilometri partono nel medesimo istante due convogli A, B verso Roma: il primo parte da

Firenze con una velocità di 39 chilometri per ogni ora, e l' altro parte da Arezzo con una velocità di 30 chilometri. Sapendosi che fra Firenze ed Arezzo vi è una distanza di 89 chilometri, si dimanda: il luogo della data linea, in cui il primo convoglio raggiungerà il secondo, quanti chilometri sarà distante da Roma.

Chiamata x questa distanza, lo spazio percorso dal primo convoglio, quando raggiunge il secondo, sarà espresso da $372-x$, e quello percorso dall' altro nello stesso tempo verrà dato da $372-89-x$.

Il primo percorrendo 39 chilometri all' ora, impiegherà ore $\frac{372-x}{39}$ per raggiungere il secondo, mentre il tempo impiegato da questo sarà dato dalla formola $\frac{372-89-x}{30}$, o meglio dalla $\frac{283-x}{30}$: ma ambidue hanno impiegato lo stesso tempo per arrivare al punto cercato, perciò si avrà l' equazione

$$(1)\ \frac{372-x}{39}=\frac{283-x}{30},$$

dalla quale risolta si ricava

$$(2)\ x=-\left(13+\frac{2}{3}\right)$$

Questo risultato negativo ci indica che l' enunciato del problema era male espresso: infatti se nella equazione (1) cambiamo il segno alla incognita avremo l' altra equazione

$$(3)\ \frac{372+x}{39}=\frac{283+x}{30},$$

dalla quale si ha

$$(4)\ x=13+\frac{2}{3}.$$

Ora l' equazione (3) non rappresenta più il dato problema, perchè l' espressione $372+x$ rappresenta uno spazio composto di tutta la linea da Firenze a Roma più l' altra linea dimandata x, e così dicasi dell' altra espressione $283+x$, e perciò la seconda linea x essendo al di là di Roma, la dimanda nel problema doveva essere espressa in questa maniera: *il primo convoglio a quanti chilometri al di là di Roma raggiungerà il secondo?* Perciò si raggiungono a chilometri tredici e due terzi dopo Roma.

Questo risultato si poteva anche avere direttamente dalla formola (2), purchè si fosse convenuto di considerare positivi gli spazi percorsi al di quà di Roma, e negativi quelli dopo Roma. Quindi ammessa questa convenzione il problema è pure solubile col primo enunciato e colla prima equazione (1).

Problema 5.° Ripigliamo il problema precedente, e trattiamolo in una maniera generale, supponendo che il primo convoglio A abbia una velocità v e l' altro v' e la distanza fra Firenze ed Arezzo sia espressa da d.

Fatte queste supposizioni si cerchi dopo quanto tempo il primo raggiungerà il secondo.

Chiamato x questo tempo, ed avvertendo che nel moto uniforme lo spazio è uguale alla velocità moltiplicata pel tempo, sí otterrà evidentemente che lo spazio percorso dal primo convoglio sarà vx, e quello percorso dal secondo verrà espresso da $v'x$. Perciò si avrà l' equazione

$$(a)\quad vx-v'x=d,$$

dalla quale si ricava

$$(b)\quad x=\frac{d}{v-v'}.$$

Conveniamo qui di rappresentare con v, v' (positive) le velocità verso Roma, e con $-v, -v'$ (negative) le velocità in senso opposto a Roma; così pure rappresenti x il tempo avvenire, e con $-x$ si indichi il tempo passato.

Nella formola (b) potremo avere i seguenti casi:

1.° ambedue le velocità dirette verso Roma,
2.° ambedue le velocità dirette in senso opposto a Roma,
3.° le velocità opposte fra di loro.

Ciascuno dei tre casi si suddividerà in tre, potendo essere

$$v \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} v'.$$

Esaminiamo separatamente questi casi diversi.

Caso 1.°

se sarà $v>v'$, x verrà espressa da $x=\frac{d}{k}$ (positiva), ed i treni si raggiungeranno verso Roma:

» » $v=v'$, x verrà espressa da $x=\frac{d}{0}$ (infinita), ed i treni non si raggiungeranno mai.

» » $v<v'$, x verrà espressa da $x=\frac{d}{-k'}$ (negativa), ed i convogli si erano già raggiunti prima dei due punti considerati.

Caso 2.°

se sarà $v>v'$, l' incognita è data da $x=\frac{d}{-k''}$ (negativa) e la congiunzione sarebbe già avvenuta prima dei due punti considerati.

» » $v=v'$, si ha $x=\frac{d}{0}$ (infinita), ed i convogli non si raggiungono mai.

» » $v<v'$, si ha l' equazione $x=\frac{d}{k'''}$ (positiva), ed i treni si raggiungeranno dalla parte opposta a Roma.

Caso 3.°

$v>0$, $v'<0$:

- abbiasi $v>v'$, si ricava $x=\frac{d}{k^{IV}}$ (positiva), il primo convoglio raggiungerà il secondo.
- abbiasi $v=v'$, si ricava $x=\frac{d}{k^{V}}$ (positiva), ed i convogli si raggiungeranno.
- abbiasi $v<v'$, si ricava $x=\frac{d}{k^{VI}}$ (positiva), e qui pure si raggiungeranno.

$v<0$, $v'>0$:

- abbiasi $v>v'$, si ricava $x=\frac{d}{-k^{VII}}$ (negativa), che rappresenterà il tempo trascorso dopo il loro congiungimento.
- abbiasi $v=v'$, si ottiene $x=\frac{d}{-k^{VIII}}$ (negativa), che rappresenta egualmente il tempo trascorso dopo il loro congiungimento.
- abbiasi $v<v'$, si ha $x=\frac{d}{-k^{IX}}$ (negativa), che rappresenta anche qui un tempo passato.

Questo esempio ci fa vedere quanto sia utile introdurre qualche volta quantità negative nei dati di un problema, potendolo così rappresentare in una maniera generale, ed evitando per tal modo di scrivere tante equazioni speciali, quanti sono i casi particolari del medesimo.

Problema 6.° Con due specie di frumento si è fatto un miscuglio di e ettolitri a lire p'' per ogni ettolitro: sapendosi che ogni ettolitro del frumento di 1.ª qualità vale lire p, e che ogni ettolitro dell' altra qualità vale lire p', si cerca il numero degli ettolitri di frumento di ciascuna specie.

Siano x, y i numeri dimandati degli ettolitri di frumento di 1.ª, e 2.ª qualità si avranno le due equazioni.

$$x+y=e,$$
$$px+p'y=ep'',$$

dalle quali risolte si ricava

$$x=\frac{e(p-p'')}{p-p'},$$

$$y=\frac{e(p''-p')}{p-p'}.$$

Essendo p il prezzo del frumento di 1.ª qualità, sarà $p-p'>0$, e quindi i valori di x e y saranno positivi, se lo saranno i numeratori delle frazioni: la quantità e essendo sempre positiva, affinchè le due incognite siano positive dovrà essere

$$p''<p\ ;$$
$$p''>p',$$ cioè il prezzo p'' del miscuglio dovrà essere intermedio ai due prezzi p e p'.

Se fosse p'' maggiore di p, ovvero minore di p', una delle due incognite sarebbe negativa, ed il problema sarebbe insolubile. È evidente che questa soluzione negativa non ci permette, come abbiamo fatto nei problemi precedenti, di cambiare l' enunciato del problema, e di scriverlo sotto altra forma più generale per avere una soluzione positiva. Altri esempi ci dimostrerebbero che non tutte le soluzioni negative si possono interpretare, come si è fatto precedentemente, perchè talvolta le incognite del problema devono necessariamente avere valori positivi: in questo caso se si trovano per le incognite valori negativi, si conclude che il problema è insolubile.

CAPITOLO IV.

DELLE PERMUTAZIONI E COMBINAZIONI

§. 1. Delle Permutazioni.

117. Si chiamano *permutazioni* le diverse disposizioni che si possono dare a più cose collocandole in un dato numero di posti, e variando l' ordine delle medesime in tutti i modi possibili.

Se si hanno tre elementi a, b, c da disporli in tutte le maniere possibili nei posti (1), (2), (3) si avranno le sei permutazioni

	(1°),	(2°),	(3°),
1.ª	a	b	c
2.ª	a	c	b
3.ª	b	a	c
4.ª	b	c	a
5.ª	c	a	b
6.ª	c	b	a

118. Il numero degli elementi da permutarsi può essere eguale, maggiore o minore dei posti nei quali debbono disporsi; onde ne nascono tre distinti casi che noi esamineremo partitamente.

119. *Caso 1.° Sia il numero degli elementi da permutarsi eguale al numero dei posti nei quali debbono disporsi.*

Supponiamo che gli elementi siano
a, b, c, d, e, ... m, ed i posti
(1°), (2°), (3°), (4°), (5°), ... (m^{esimo}).

Indichiamo col simbolo P_m il numero delle permutazioni che si possono fare con m elementi in m posti: per analogia i simboli
P_{m-1}, P_{m-2}, P_{m-3}, ... P_2, P_1 rappresenteranno il numero delle permutazioni che rispettivamente si possono fare con
$m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 2, 1 elementi, nei posti
$m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 2, 1.

Ciò posto collochiamo il primo elemento a nel primo posto (1°), e cogli altri elementi $m-1$ facciamo tutte le permutazioni possibili negli altri posti $m-1$; il numero di queste permutazioni sarà espresso da P_{m-1}: poscia mettiamo il primo elemento a nel secondo posto (2°) e cogli altri elementi $m-1$ facciamo tutte le permutazioni possibili negli altri posti $m-1$; il numero di queste permutazioni sarà qui pure espresso da P_{m-1}; così ponendo successivamente il primo elemento a nei posti (3°), (4°), (5°), ... (m^{esimo}), e facendo contemporaneamente e per ogni volta tutte le permutazioni possibili cogli altri elementi $m-1$ negli altri posti $m-1$ avremo per ogni volta un numero di permutazioni che ci è dato dal simbolo P_{m-1}.

Dunque, questo numero P_{m-1} dovendosi prendere tante volte quanti sono i posti, avremo che il numero

totale delle permutazioni ottenute con queste operazioni sarà $m . P_{m-1}$. Ora se a ciascuna permutazione vi aggiungiamo il primo elemento a collocandolo nel suo posto rispettivo, il numero delle permutazioni sarà egualmente $m . P_{m-1}$, e ciascuna conterrà m elementi collocati in m posti; ma quando si hanno m elementi da permutarsi in m posti, il numero delle permutazioni viene espresso da P_m; perciò si avrà la relazione (α) $P_m = m \; P_{m-1}$.

Se invece di prendere m elementi, ed m posti, ne prendessimo $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... , . 3, 2, 1, ripetendo il medesimo ragionamento si avrebbero altre equazioni della forma della già trovata: queste equazioni si potrebbero anche trovare più brevemente sostituendo nella (α) invece m successivamente $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... 3 , 2 , 1 .

Si avrebbero così le seguenti relazioni

$$P_m = m \; P_{m-1}$$
$$P_{m-1} = (m-1). \; P_{m-2}$$
$$P_{m-2} = (m-2). \; P_{m-3}$$
$$P_{m-3} = (m-3). \; P_{m-4}$$
. . . .
. . . .
$$P_3 = 3. \; P_2$$
$$P_2 = 2. \; P_1$$
$$P_1 = 1.$$

In quest' ultima equazione si è fatto $P_1 = 1$, perchè il numero delle permutazioni che si possono fare con un elemento in un posto solo non può essere che *uno*.

Moltiplichiamo ora insieme i primi membri di queste equazioni e fra loro i secondi, e poscia levando i fattori comuni

P_{m-1}, P_{m-2}, ... P_2, P_1 si avrà l' equazione

$$(\beta)\ P_m = m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots 3.2.1,$$

la quale è la formola generale delle permutazioni, quando il numero m delle cose da permutarsi è uguale al numero dei posti.

Applicazione. In quante maniere si possono disporre quattro scolari in quattro posti?

Si avrà $P_4 = 4.3.2 = 24$.

120. *Caso 2.° Sia il numero degli elementi da permutarsi maggiore del numero dei posti, nei quali debbono disporsi.*

Supponiamo che gli elementi siano

a, b, c, d, ... m, ed i posti

(1°), (2°), (3), (4°), ...(n^{esimo})

essendo $m > n$.

Rappresentiamo col simbolo $P_{m,n}$ il numero delle permutazioni che si possono fare con m elementi in n posti: per analogia i simboli

$P_{m-1,n-1}$, $P_{m-2,n-2}$, ... indicheranno il numero delle permutazioni che rispettivamente si possono ottenere con

$m-1$, $m-2$, ... elementi, nei posti
$m-1$, $m-2$, ...

Come nel primo caso, collochiamo il primo elemento a nel primo posto (1°), e cogli altri elementi $m-1$ facciamo tutte le permutazioni possibili negli altri posti $n-1$; il numero di queste permutazioni sarà espresso da $P_{m-1,n-1}$: poscia nel medesimo primo posto (1°) mettiamo il secondo elemento b, e cogli altri elementi $m-1$ facciamo tutte le permutazioni possibili negli altri posti $n-1$; il numero delle permutazioni sarà qui pure $P_{m-1,n-1}$; così facendo passare successivamente nel primo posto (1°) tutti gli elementi m, e contemporaneamente e per ogni volta permutando fra loro gli altri elementi $m-1$ negli altri posti $n-1$, avremo per ogni volta un numero di permutazioni che ci è dato dal simbolo $P_{m-1,n-1}$. Dunque questo numero dovendosi prendere tante volte quanti sono gli elementi, avremo che il numero totale delle permutazioni ottenute in questa maniera sarà $m.\ P_{m-1,n-1}$.

Ora se a ciascuna permutazione vi aggiungiamo il primo posto (1°) col rispettivo elemento ivi collocato, il numero delle permutazioni sarà egualmente $m.\ P_{m-1,n-1}$, e ciascuna conterrà m elementi collocati in n posti; ma quando si hanno m elementi da permutarsi in n posti il numero delle permutazioni viene espresso da $P_{m,n}$; perciò si avrà la relazione

$$(\alpha')\ P_{m,n}=m.\ P_{m-1,n-1}$$

Da questa equazione se ne possono trovare altre della stessa forma col supporre che tanto il numero m degli elementi, quanto il numero n dei posti diminuisca di un' unità. Prima però di formare queste equazioni è necessario avvertire che dovendosi togliere sempre la stessa quantità tanto da m quanto da n sino a che si arrivi ad avere un posto solo, nell' ultima equazione il numero dei posti sarà espresso

da $n-(n-1)=1$, ed il numero degli elementi
da $m-(n-1)=m-n+1$.

Pertanto si avranno le seguenti relazioni

$$P_{m,n}=m.\,P_{m-1,n-1},$$
$$P_{m-1,n-1}=(m-1).\,P_{m-2,n-2},$$
$$P_{m-2,n-2}=(m-2).\,P_{m-3,n-3},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$P_{m-n+3,3}=(m-n+3).\,P_{m-n+2,2},$$
$$P_{m-n+2,2}=(m-n+2).\,P_{m-n+1,1},$$
$$P_{m-n+1,1}=m-n+1:$$

quest' ultima equazione si spiega facilmente se si considera che le permutazioni sono $m-n+1$, se si permutano gli elementi $m-n+1$ in un posto solo.

Moltiplichiamo ora queste equazioni insieme: cancellati i fattori comuni ai due membri avremo l' equazione

(β') $P_{m,n} = m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots (m-n+1)$,

che sarà la formola generale delle permutazioni di m elementi in n posti, quando sia $m>n$.

Applicazione. In quante maniere diverse possono disporsi 10 scolari sopra cinque sedie?

Si avrà l' equazione $P_{10,5} = 10.9.8.7.6 = 30240$.

121. *Caso 3.° Il numero degli m elementi da permutarsi sia minore degli n posti, nei quali vanno disposti.*

Conservate le medesime denominazioni, ed i medesimi simboli del secondo caso, poniamo il primo elemento a nel primo posto (1°), e facciamo cogli altri elementi le permutazioni negli altri posti: queste saranno $P_{m-1,n-1}$: poscia il primo elemento a mettiamolo successivamente nei posti (2°), (3°), (4°) ..... (n^{esimo}) e per ciascuna volta facciamo le permutazioni cogli altri elementi negli altri posti: il numero $P_{m-1,n-1}$ sarà così ripetuto tante volte quanti sono i posti n: perciò il numero totale delle fatte permutazioni sarà

(α'') $P_{m,n} = n. \ P_{m-1,n-1}$.

Se anche qui ripetessimo tutto il ragionamento fatto pel secondo caso si ricaverebbero facilmente le seguenti equazioni

$$P_{m,n}=n.\ P_{m-1,n-1},$$
$$P_{m-1,n-1}=(n-1)\ P_{m-2,n-2},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$P_{2,n-m+2}=(n-m+2).\ P_{1,n-m+1},$$
$$P_{1,n-m+1}=n-m+1\ .$$

Moltiplicate insieme queste equazioni, e fatte le solite riduzioni si avrà

$$(\beta'')\ P_{m,n}=n(n-1)\ (n-2)\ldots\ldots(n-m+1),$$

che sarà la formola delle permutazioni di m elementi in n posti quando sia $m<n$.

Applicazione. In quante maniere possono disporsi tre scolari sopra sei sedie?

Si avrà l' equazione $P_{3,6}=6.\ 5.\ 4=120$.

122. La formola (β) del primo caso si può ricavare facilmente da quella (β') del secondo caso, purchè si faccia in questa $m=n$. Così pure la formola (β'') del terzo caso si può ottenere facilmente da quella (β') del secondo caso, purchè si cambi m in n e viceversa.

123. Per trovare le formole precedenti abbiamo supposto che tutti gli elementi siano diseguali. Se taluni fra gli elementi dati sono eguali fra loro, il numero delle permutazioni non può rimanere lo stesso: se si avessero p. es. da permutarsi fra loro le tre lettere a, b, c, si avrebbero le sei permutazioni

abc, acb, bac, bca, cab, cba :

se b diventa eguale ad a, si avrà

aac, aca, aac, aca, caa, caa:

qui si vede che la prima permutazione è eguale alla 3ª, la 2ª eguale alla 4ª, e le due ultime eguali fra di loro; quindi le disposizioni diverse si riducono a tre.

124. Determiniamo una formola generale che ci dia il numero delle permutazioni differenti nella supposizione che fra gli m elementi ve ne siano r identici.

Avremo anche qui tre casi secondochè il numero m degli elementi sarà minore, eguale o maggiore del numero n dei posti.

Caso 1.° Sia $m=n$. In ciascuna permutazione essendo contenuti tutti gli m elementi, vi saranno ancora tutti gli r elementi identici, e quindi ciascuna permutazione sarà ripetuta tante volte quante sono le permutazioni che si possono fare con r elementi in r posti, ossia sarà ripetuta P_r volte. Quindi il numero delle permutazioni differenti si troverà dividendo il numero totale delle permutazioni che è P_m pel numero P_r : quindi la formola generale dimandata sarà

$$(1) \quad \frac{P_m}{P_r} .$$

Applicazione. Quante permutazioni differenti si possono fare con sei lettere, delle quali le tre prime sono eguali?

Si avrà $\frac{P_6}{P_3} = \frac{6.5.4.3.2}{3.2} = 120.$

Se fra gli *m* elementi, oltre di esservi gli *r* elementi identici, ve ne fossero altri *q* identici fra loro, ed altri *s* identici fra loro, è chiaro che collo stesso ragionamento si troverebbe l' altra formola

$$(2)\ \frac{P_m}{P_r \,.\, P_q \,.\, P_s}\ .$$

Applicazione. Trovare il numero delle permutazioni differenti che si possono ricavare da 9 lettere, nell' ipotesi che le prime tre siano eguali fra di loro, le altre tre eguali fra di loro, e così pure le ultime tre eguali fra di loro. P. es. *aaa bbb ccc*, che si rappresentano anche con $(a^3b^3c^3)$.

Si avrà $\dfrac{P_9}{P_3 \,.\, P_3 \,.\, P_3\,.} = \dfrac{9.8.7.6.5.4.3.2}{2.3.2.3.2.3}$

Caso 2.° Sia $m < n$. Essendovi anche qui in ciascuna permutazione tutti gli *m* elementi, collo stesso ragionamento fatto nel 1.° caso si troveranno le formole.

$$(3)\ \frac{P_{m,n}}{P_r}\ ,$$

$$(4)\ \frac{P_{m,n}}{P_r \,.\, P_q \,.\, P_s}\ .$$

Caso 3.° Sia $m > n$. Fra gli *m* elementi *a,b,c,d,....* supponiamo che ve ne siano *p* eguali ad *a*, *q* eguali a *b*, *r* eguali a *c*. Tutti questi elementi potranno

essere espressi dal prodotto $a.^q\, b.^r\, c.^s\, d.\ e\ \ldots\ldots$ il quale sarà di m dimensioni.

Ora dovendosi permutare gli m elementi in tutte le maniere possibili negli n posti, in ciascuna permutazione non avremo tutti gli elementi, ma soltanto n elementi, e perciò in ciascuna permutazione avremo un prodotto di n dimensioni. Al fine pertanto di fare tutte queste permutazioni formeremo colle date lettere tutti i possibili prodotti di n dimensioni coll' avvertenza che gli esponenti delle a, b, c non debbono rispettivamente superare q, r, s: poscia si troveranno i numeri di tutte le permutazioni differenti in ciascun prodotto, e la loro somma darà il numero delle permutazioni differenti.

Applicazione. Abbiansi sei lettere da permutarsi in tre posti colla supposizione che le prime tre siano eguali fra loro, e le ultime due eguali pure fra di loro. Queste quantità potranno venire espresse dal prodotto $(a.^3 b.c^2)$: dovendo contenere ciascuna permutazione tre lettere, si dovranno prima di tutto fare tutti i prodotti di 3 dimensioni, i quali saranno

$$(a^3),\ (a^2b),\ (a^2c),\ (ac^2),\ (bc^2):$$

in ciascun prodotto avremo le seguenti permutazioni differenti:

$$(a^3)=\frac{P_3}{P_3}=\frac{3.2.}{3.2.}=1\,,$$

$$(a^2b)=\frac{P_3}{P_2}=\frac{3.2.}{2}=3\,,$$

$$(a^2c)=\frac{P_3}{P_2}=\frac{3.2.}{2}=3\,,$$

$$(ac^2)=\frac{P_3}{P_2}=\frac{3.2}{2}=3\,,$$

$$(bc^2)=\frac{P_3}{P_2}=\frac{3.2}{2}=3\,.$$

Fatta la somma si otterà che 13 sono le permutazioni dimandate.

125. Da alcuni le *permutazioni* sono state chiamate *alternazioni*: altri, mentre hanno usato del nome di *permutazioni* nel caso che il numero degli elementi sia eguale al numero dei posti nei quali vanno portati, hanno poi adoperato quello di *disposizioni* nel caso che il numero degli elementi sia diverso da quello dei posti.

Le *permutazioni* o *disposizioni* si dividono in *classi*: il numero della classe è dato dal numero degli elementi contenuti in ciascuna permutazione o disposizione.

Date le tre lettere *a, b, c,* e fatte le permutazioni, sono di 1.ª Classe *a, b, c;*

» 2.ª » *ab, bc, ac, ca, bc, cb;*

» 3.ª » *abc, acb, bca, bac, cab, cba.*

126. Presentiamo qui ai giovani diligenti alcuni problemi sulle permutazioni.

Problema 1.° Un maestro, che ha 20 scolari e 20 posti, vorrebbe disporli fra loro in tutte le maniere possibili: prima d' incominciare questa operazione dimanda ad uno degli scolari: ammesso che si faccia una sola permutazione in 5 minuti, dopo quante ore si saranno fatte tutte le permutazioni?

Problema 2.° Quanti numeri possono formarsi di tre cifre ciascuno colle cifre 2, 4, 6, 8?

Problema 3.° Trovare il numero delle permutazioni che si possono fare con 15 scolari in cinque posti.

Problema 4.° Quanti numeri possono formarsi colle sei cifre 2, 2, 3, 3, 3, 4?

Problema 5.° Quanti numeri di tre cifre ciascuno possono formarsi colle cifre 2, 2, 3, 4, 4?

§. 2. Delle Combinazioni

127. Chiamansi *combinazioni* (da alcuni dette anche *prodotti differenti*) di *m* elementi i differenti gruppi che

si ottengono col riunire un dato numero di questi elementi in modo che due gruppi qualunque differiscano fra loro almeno di un elemento.

Le *combinazioni* dunque differiscono dalle *permutazioni* in questo che nelle permutazioni i gruppi sono differenti per le diverse disposizioni degli elementi contenuti, mentre nelle combinazioni i gruppi sono differenti per gli elementi che contengono.

128. Nelle *combinazioni* gli m elementi possono unirsi a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4, ed in generale a q a q.

Le combinazioni si dividono in classi: sono di 1.ª, 2.ª, 3.ª , ... p^{esima} classe secondochè il numero degli elementi in ciascun gruppo è 1,2,3 . . . p.

Le combinazioni di seconda classe chiamansi *ambi* o *binarj,* quelle di terza classe *terni* o *ternari,* quelle di quarta classe *quaderni* o *quaternari,* . . . . . quelle di p^{esima} classe si diranno p^{nari} . Da alcuni il numero della classe viene detto *esponente* delle combinazioni.

Se si avranno le tre lettere *a, b, c,*

le permut. di 2.ª classe sono *ab, ba, ac, ca, bc, cb,*
le combin. di 2.ª classe sono *ab, ac, bc,*

le permut. di 3.ª classe sono *abc, acb, bca, bac, cab, cba*
le combin. di 3.ª classe sono *abc.*

129. Troviamo ora la formola generale che ci dia il numero delle combinazioni che si possono fare con m elementi unendoli a q a q. Il numero di queste combinazioni si indichi col simbolo $C_{m,q}$, e facciamo in ciascuna combinazione con gli elementi q ivi contenuti tutte le permutazioni possibili: è chiaro (n.° **119**) che il numero delle permutazioni in ciascuna

combinazione sarà espresso da P_q, il quale è ripe-petuto tante volte quante sono le combinazioni $C_{m,q}$; quindi il numero di tutte queste permutazioni verrà dato da $P_q \cdot C_{m,q}$. Ora il complesso di queste combinazioni non è altro che il numero delle permutazioni che si possono ricavare con m elementi in q posti, il quale si rappresenta con $P_{m,q}$: quindi si avrà la relazione

$$P_q \cdot C_{m,q} = P_{m,q},$$

dalla quale si ha

$$(1) \quad C_{m,q} = \frac{P_{m,q}}{P_q};$$

e mettendo nel secondo membro invece dei simboli i rispettivi valori avremo la formola generale delle combinazioni espressa dalla equazione

$$(2) \quad C_{m,q} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{q(q-1)(q-2)\ldots 3.2.1}.$$

Applicazione. Quanti ambi, terni e quaderni si possono fare con 90 numeri?

Si avrà la formola

degli ambi $C_{90,2} = \frac{90.89}{2}$,

dei terni $C_{90,3} = \frac{90.89.88}{3.2}$,

dei quaderni $C_{90,4} = \frac{90.89.88.87}{4.3.2}$

130. Con m elementi facciamo successivamente due *classi* di combinazioni: nella prima gli elementi siano combinati ad n ad n, e nella seconda ad $m-n$ ad $m-n$: dimostrerò che il numero delle prime combinazioni è uguale a quello delle seconde.

Dalla formola delle combinazioni (2) si ricaveranno le due equazioni

$$(3)\ C_{m,n}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots3.2.1},$$

$$(4)\ C_{m,m-n}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(n+1)}{(m-n)(m-n-1)\dots3.2.1},$$

delle quali la (3) rappresenta il numero delle combinazioni di m elementi combinati ad n ad n, e la (4) quello delle combinazioni di m elementi combinati ad $m-n$ ad $m-n$.

Moltiplichiamo i due termini della prima frazione per $1.2.3\dots(m-n)$, ed i due termini della seconda per $1.2.3\dots n$:

Si avranno le altre due equazioni

$$(5)\ C_{m,n}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)\dots3.2.1}{n(n-1)\dots3.2.1.(m-n)(m-n-1)\dots3.2.1}$$

$$(6)\ C_{m,m-n}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(n+1)n\dots3.2.1}{n(n-1)\dots2.1.(m-n)(m-n-1)\dots3.2.1};$$

essendo eguali i due secondi membri si ha l' eguaglianza

$$(7)\ C_{m,n}=C_{m,m-n},$$

nella quale si legge che il numero delle combinazioni di m cose combinate ad n ad n è uguale a quello che si ottiene combinandole ad $m-n$ ad $m-n$.

Questa proposizione si può anche dimostrare con una semplice considerazione. Infatti se di m elementi se ne prendono n, ne resta un gruppo di $m-n$: perciò ad ogni volta che facciamo una combinazione col gruppo n, ne rimane fatta una corrispondente cogli altri elementi $m-n$. Quindi i numeri di queste due classi di combinazioni saranno eguali.

Applicazione. Trovare il numero delle combinazioni di sette lettere unendole a tre a tre, oppure a quattro a quattro.

$$\text{Si avrà } P_{7,3}=\frac{7.6.5}{3.2}=35,$$

$$P_{7,4}=\frac{7.6.5.4}{4.3.2}=35.$$

Nel secolo 16.° si trovano i primi germi delle teorie delle combinazioni. BIAGIO PASCAL nato a Clermont il 19 Giugno 1623 e morto il 19 Agosto 1662, è l' autore della prima memoria (1650) estesa sulle combinazioni. Questa teoria si trova completamente nell' *Ars conjectandi* di Giacomo Bernoulli (1713).

131. Daremo qui alcuni problemi relativi alle combinazioni.

Problema 1.° Quante cartelle differenti possono formarsi pel giuoco della tombola, nell' ipotesi che ciascuna cartella debba contenere 15 dei 90 numeri, coi quali si fa questo giuoco?

Problema 2.° Quanti *ambi, terni* e *quaderni* si possono fare con cinque numeri?

Problema 3.° Ho sopra una tavola i seguenti libri

1.° 4 tomi segnati *a*, *b*, *c*, *d* dell' *Istoria delle Scienze Matematiche in Italia di* GUGLIELMO LIBRI:

2.° 4 tomi segnati α, β, γ, δ del *Saggio sulla Storia generale delle Matematiche di* CARLO BOSSUT:

4.° 4 tomi segnati A, B, C, D dell' *Istoria delle Matematiche di* J. F. MONTUCLA.

In quante maniere si potranno dare tre tomi ad uno scolaro che ne dimanda tre qualsiansi dei dodici?

Problema 4.° Alla festa dello *Statuto* e dell' *Unità d' Italia* un professore vuole condurre i suoi 30 scolari disposti in file ed a 2 a 2: quante coppie egli potrà fare?

CAPITOLO V.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI DEI POLINOMI

§. 1. Delle potenze dei polinomi.

132. Abbiamo già visto (capitolo 2.°) il modo di formazione delle potenze dei monomi, ed ora vedremo come si deve operare per le potenze dei polinomi.

Per cominciare dalle potenze di un binomio facciamo la seconda potenza del binomio $a+b$: fatta la moltiplicazione si avrà

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

Questa formola ci mostra che il quadrato di un binomio è uguale al quadrato della prima parte del binomio, più il doppio prodotto della prima nella seconda, più il quadrato della seconda.

Moltiplicando il quadrato ottenuto per $a+b$ si forma la terza potenza del binomio o il suo cubo che sarà

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

In questa formola si legge che il cubo di un binomio è uguale al cubo della prima parte del binomio, più il triplo del quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più il triplo della prima moltiplicato pel quadrato della seconda, più il cubo della seconda.

Se si moltiplicasse il cubo ottenuto per $(a+b)$, si formerebbe la sua quarta potenza: e così moltiplicando questa per $a+b$ si avrebbe la quinta e così di seguito.

Mettiamo qui le prime otto potenze trovate colla moltiplicazione

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35.a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$
$$(a+b)^8=a^8+8a^7b+28a^6b^2+56.a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^6+b^8$$

Analizzando queste potenze, e confrontandole fra loro si trova:

1.° Che il numero dei termini di ciascuna potenza supera di un' unità il grado della medesima: perciò nelle potenze pari il numero dei termini è dispari, e nelle dispari sarà pari, e quindi nelle prime vi è un sol termine medio, due nelle altre.

2.° Il primo termine di ciascuna potenza si compone del primo termine del binomio, e l' ultimo si compone del secondo termine dello stesso binomio: gli altri termini contengono ambi i termini del binomio.

3.° In ciascuna potenza il primo e l' ultimo termine sono innalzati ad un esponente eguale al grado

della potenza, negli altri intermedi l' esponente della prima lettera a del binomio diminuisce di un' unità da un termine all' altro verso destra, mentre quello della lettera b cresce pure di un' unità: per cui in ogni termine la somma dei due esponenti eguaglia il grado della potenza.

4.° Il coefficiente del primo e dell' ultimo termine eguaglia l' unità, quello del secondo e del penultimo è uguale al grado della potenza, e così i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono eguali. Si trova poi il coefficiente di un termine qualunque col moltiplicare il coefficiente del termine precedente per l' esponente della prima lettera a posta in questo termine, e dividendo poscia il prodotto pel numero dei termini precedenti. Da ciò si conclude che trovata la metà più uno del numero dei termini nelle potenze pari, e la sola metà nelle dispari, si ottengono facilmente gli altri termini col prendere eguali i coefficienti equidistanti e collo scambiare gli esponenti sulle due lettere dei termini pure equidistanti.

133. Con queste quattro regole sarà facile la costruzione della potenza m^{esima} del binomio $(a+b)$: questa sarà:

$$(1)\quad (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4 + \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}. a^4 . b^{m-4}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} a^3 b^{m-3} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 b^{m-2}$$

$$+ mab^{m-1} + b^m .$$

Questa è la celebre formola trovata da NEWTON e chiamata comunemente *formola del binomio* o *binomio di* NEWTON.

ISACCO NEWTON nacque a Woolstorpe nella contea di Lincoln in Inghilterra il 25 Dicembre 1642, e morì il 20 marzo 1727. Avendo di buon ora perduto il padre, di dodici anni appena ebbe imparato tutto ciò che allora costituiva l' educazione di un gentiluomo di campagna, e sua madre lo destinò agli affari domestici. NEWTON di mala voglia vi si adattò, e mentre era mandato colla scorta di un ajo al mercato della vicina città, egli, lasciando all' ajo la cura degli affari; o si ritirava in un posto qualsiasi, o restava sulla via accanto ad una siepe, leggendo l' intera giornata libri di Matematica.

Non avendo il giovine NEWTON corrisposto alle vedute di sua madre, questa si decise di lasciargli continuare la carriera degli studi più adatta alle sue inclinazioni, e lo rinviò alla scuola di Grantham, la quale era l' oggetto de' suoi più vivi desiderj. Dopo poco tempo entrò nel collegio delle Trinità di Cambridge, ove fece sì maravigliosi progressi nelle scienze matematiche che sino da quel tempo fu annuciato ciò che divenuto sarebbe un giorno.

A 27 anni NEWTON era già in possesso dello sviluppo del *binomio* che porta il suo nome, del suo *Calcolo delle flussioni* (calcolo differenziale), della *Teoria delle gravitazione universale, e della decomposizione della luce.*

Fu rappresentante dell' Università di Cambridge alla celebre Convenzione del 1688, e al Parlamento del 1701: fu professore, membro delle principali Accademie, e Direttore della Zecca. Nel

1703 fu nominato presidente della Società Reale. Egli occupò questa carica onorifica fino al termine della sua gloriosa vita.

Le sue Opere principali sono i *Principii matematici della Filosofia naturale, l' Ottica, il Metodo delle flussioni, l' Aritmetica universale.*

134. La formola (1) trovata è vera per qualsivoglia valore dell' esponente m intero o frazionario, positivo o negativo: ci limiteremo qui a darne la dimostrazione nel solo caso che l' esponente sia intero.

Abbiansi i fattori binomi $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, $(x+d)$, $(x+e)$, ...: eseguite le moltiplicazioni, ed ordinati i prodotti secondo le potenze decrescenti della x, si avranno le seguenti relazioni:

$$1.^{a}\quad (x+a)(x+b)=x^2\begin{array}{r|l} +a & x+ab, \\ +b & \end{array}$$

$$2.^{a}\quad (x+a)(x+b)(x+c)=x^3\begin{array}{r|r|l} +a & x^2+ab & x+abc \\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

$$3.^{a}\quad (x+a)(x+b)(x+c)(n+d)=x^4\begin{array}{r|l} +a & x^3 \\ +b & \\ +c & \\ +d & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} +ab & x^2+abc & x+abcd \\ +ac & +abd & \\ +ad & +acd & \\ +bc & +bcd & \\ +bd & & \\ +cd & & \end{array}$$

4.ª
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)=x^5+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\\+d\\+e\end{array}\right|x^4$$

$$\left.\begin{array}{r}+ab\\+ac\\+ad\\+ae\\+bc\\+bd\\+be\\+cd\\+ce\\+de\end{array}\right|x^3\left.\begin{array}{r}+abc\\+abd\\+abe\\+acd\\+ace\\+ade\\+bcd\\+bce\\+bde\\+cde\end{array}\right|x^2\left.\begin{array}{r}+abcd\\+abce\\+abde\\+acde\\+bcde\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right|x+abcde$$

e così di seguito.

Da queste eguaglianze si vede che il prodotto di due, tre, quattro, o più fattori binomi aventi il primo termine x comune, ed ordinato secondo le potenze discendenti di questo primo termine contiene tanti termini quanti sono i fattori binomi, più uno: il primo termine del prodotto contiene la prima lettera x elevata ad un esponente eguale al numero dei fattori, e gli altri termini successivi (eccettuato l' ultimo) contengono la stessa lettera elevata ad un esponente che va gradatamente diminuendo di un' unità.

Si scorge pure che il coefficiente del primo termine è l' unità; quello del secondo termine è la somma dei secondi termini a, b, c, d, e dei fattori binomi; quello del terzo è la somma degli ambi o

prodotti distinti che si possono fare coi secondi termini de' fattori binomi combinandoli a 2 a 2; quello del quarto è la somma dei terni o prodotti distinti che si possono fare cogli stessi termini presi a 3 a 3, e così di seguito fino all' ultimo termine, il quale è il prodotto di tutti i secondi termini dei fattori binomi.

Se si prendesse un numero maggiore di fattori binomi aventi il primo termine comune, si troverebbero egualmente queste leggi di formazione dei relativi prodotti.

Ora dimostreremo la verità di queste leggi per qualsiasi numero di fattori binomi.

Supponiamo vere queste leggi nel caso di m fattori binomi: dimostreremo che sono egualmente vere nel caso di $m+1$ fattori binomi. Infatti prendiamo i fattori binomi $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, ... di numero m, e indicata con Σ_1 la somma dei secondi termini dei fattori binomi, e rappresentati con Σ_2, Σ_3, Σ_4, ... le somme degli ambi, terni, quaterni, ecc. che si possono fare cogli stessi secondi termini, e con Σ_m il prodotto di tutti questi termini, si avrà la formola

$$(2)\quad x^m + \Sigma_1 x^{m-1} + \Sigma_2 x^{m-2} + \Sigma_3 x^{m-3} + \Sigma_4 x^{m-4} + \dots + \Sigma_m .$$

Introduciamo ora un altro fattore binomio $x+k$ col moltiplicatore la formola (2) per questo fattore, avremo cosi l' altra

$$(3)\quad x^{m+1}\begin{array}{l|}+\Sigma_1\\+k\end{array}\; x^{m}\begin{array}{l|}+\Sigma_2\\+\Sigma_1\end{array}\; x^{m-1}\begin{array}{l|}+\Sigma_3\\+k\Sigma_2\end{array}\; x^{m-2}$$

$$\begin{array}{l|}+\Sigma_4\\+k\Sigma_3\end{array}\; x^{m-3}+\,\ldots\ldots\ldots\,+k\Sigma_m$$

Esaminando attentamente questa equazione vediamo che ivi si trovano pure le già trovate leggi: infatti l' esponente del primo termine è eguale al numero dei fattori, e successivamente va diminuendo di un' unità; il coefficiente del primo termine è l' unità; quello del secondo è la somma di tutti i secondi termini dei fattori binomi; quello del terzo è la somma degli ambi che si possano fare cogli $m+1$ secondi termini dei fattori binomi, e così di seguito sino all' ultimo termine, il quale è il prodotto di tutti gli $m+1$ secondi termini dei fattori binomi.

Da ciò ne consegue che le leggi trovate essendo vere nel caso che si hanno cinque fattori binomi, saranno ancora vere nel caso di sei, e quindi di sette di otto, ecc. di un numero indefinito.

135. Supponiamo ora che tutti i secondi termini de' fattori binomi diventino eguali fra di loro, e sia $a=b=c=d=e=\ldots.$

Ciascun fattore diventerà $(x+a)$, il prodotto degli m fattori verrà indicato da $(x+a)^m$, la somma degli m secondi termini sarà $\Sigma_1=a+b+c+d+\ldots\ldots$ $=a+a+a+a+\ldots\ldots=ma$; la somma degli ambi sarà $\Sigma_2=a^2+a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots$ ossia tante volte a^2 quanti sono gli ambi che si possono fare con m elementi, e però $\Sigma_2=\frac{m(m-1)}{2}a^2$: egualmente la somma dei terni verrà espressa da $\Sigma_3=a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots$ $=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^3$, e così di seguito, e finalmente $\Sigma_m=aaaa\ldots\ldots=a^m$.

Pertanto la formola (2) del n.° precedente si cambierà nella

$$(4)\quad (x+a)^m=x^m+m.x^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}a^2$$
$$+\frac{m(m-1)m-2)}{2.3}x^{m-3}a^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}.x^{m-4}.a^4+\ldots\ldots+a^m.$$

La quale è della stessa forma della (1) (n.° **133**) come si voleva dimostrare.

136. Se si cercasse lo sviluppo di $(x-a)^m$, basterebbe nella (4) cambiare a in $-a$, e poichè le potenze pari di $-a$ sono eguali a quelle di a e le inpari sono eguali e di segno contrario, così si avrà

$$(5)\ (x-a)^m = x^m - mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}a^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}a^3 + \ldots \pm a^m.$$

137. Se nelle due equazioni (4), (5) precedenti facciamo $x=1$, $a=1$, si ottengono le altre due

$$(6)\ 2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} \ldots,$$

$$(7)\ 0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} \ldots,$$

dalle quali si deduce che la somma dei coefficienti di tutti i termini dello sviluppo della m^{esima} potenza di $(x+a)$ è uguale alla m^{esima} potenza di 2, e la somma dei coefficienti de' termini d' ordine impari è uguale a quella dei coefficienti dei termini d' ordine pari.

138. Per fare la potenza di un trinomio, e di un polinomio si deve avere l' avvertenza di scriverlo sotto la forma di un binomio, e poscia sviluppare la potenza secondo le conosciute leggi.

Voglio la m^{esima} potenza del trinomio $(x+a+c)$: si potrà scrivere $(x+a+c)^m = \{(x+a)+c\}^m =$

$$(x+a)^m + m.(x+a)^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{2}.(x+a)^{m-2}c^2 + \ldots\ldots$$

Poscia in questa formola si dovranno successivamente sviluppare le potenze del binomio $(x+a)$.

§. 2. Delle radici dei polinomi.

139. L' estrazione di radice dai polinomi è una operazione che in generale non può effettuarsi: ma in alcuni casi la radice di un polinomio potendo esprimersi per un altro polinomio, vedremo come allora si possa trovare.

140. *Radice seconda dei polinomi.* Incominciando dalla estrazione di radice seconda dei polinomi gioverà ricordare (n.° 24) che moltiplicando per se stesso un polinomio ordinato secondo le potenze discendenti di una lettera, il primo e l' ultimo termine del polinomio *prodotto,* similmente ordinato secondo le potenze discendenti della prima lettera, saranno il quadrato del primo ed ultimo termine del polinomio dato: perciò se si vuole estrarre la radice seconda da un polinomio ordinato per le potenze decrescenti di una lettera, il primo termine del polinomio *radice* sarà la radice del primo termine del polinomio dato: così pure l' ultimo termine del polinomio *radice* verrà dato dalla radice dell' ultimo termine del polinomio proposto. Se si dimandasse la radice seconda del polinomio

$$x^4-4x^3+10x^2-12x-9,$$

il primo termine del polinomio *radice* sarebbe x^2, e l' ultimo termine 3.

Da ciò evidentemente si conclude che quando il primo e l' ultimo termine del polinomio dato non hanno una radice quadrata razionale, nessun polinomio *razionale* potrà essere radice quadrata del proposto.

Per trovare tutti gli altri termini del polinomio *radice* vediamo come sia costrutto il quadrato di un polinomio.

Dalla formola del binomio di Newton avremo

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad$$
$$+2bc+2bd+2cd;$$

da queste si ha che il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini del polinomio, più il doppio della somma dei prodotti distinti che si ottengono col moltiplicare a 2 a 2 questi termini.

141. Ora volendo estrarre la radice seconda dal polinomio ordinato (1) $x^4+4x^3+4x^2$, il primo termine di questa (n.° 140) sarà x^2: dovendo il polinomio dato contenere il quadrato del primo termine della radice, più il doppio prodotto del primo nel secondo termine, più il quadrato di questo, se dal polinomio (1) toglieremo x^4 che è il quadrato del primo termine della radice rimarrà

(2) $4x^3+4x^2$, il quale conterrà soltanto il doppio prodotto del primo nel secondo termine della radice, più il quadrato di questo. Se dunque divideremo il residuo polinomio (2) pel doppio $2x^2$ del termine trovato, il quoziente $2x$ formerà il secondo termine della radice: Se dal polinomio residuo (2) si sottrae il doppio prodotto del primo termine nel secondo ($2x^2.2x$) più il quadrato del secondo termine ($2x.2x$), si ha per differenza zero, e perciò il binomio x^2+2x è la radice cercata.

Ecco come si potrebbe disporre l' operazione

	$x^4+4x^3+4x^2$	x^2+2x
	$-x^4$	
1.° resto	$4x^3+4x^2$	$2x^2+2x$
	$-4x^3-x^2$	$+2x$
2.° resto	0 0	

Vogliasi pure estrarre la radice seconda dal polinomio (α) $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$. Il primo termine della radice è x^2, e sottratto da questo polinomio il quadrato x^4 della radice, si ha

(β) $-4x^3+10x^2-12x+9$. Per trovare il secondo termine della radice dividiamo il primo termine del polinomio (β) residuo pel doppio $2x^2$ del primo termine della radice, si ha per quoziente $-2x$, che sarà il secondo termine della radice: ora moltiplichiamo questo secondo termine per se stesso, e pel doppio del primo: si ha il prodotto

$-2x(2x^2-2x)=-4x^3+4x^2$, il quale sottratto dal polinomio (β) ci dà

(γ) $6x^2-12x+9$. Questo residuo non essendo zero, la radice cercata non sarà formata di soli due termini: per trovare il terzo dovremo considerare i due già trovati come la prima parte della radice, e dividere l' ultimo residuo (γ) pel doppio di questa prima parte: avremo per primo quoto 3. Si moltiplichi ora questo quoto per se stesso e pel doppio dei due primi termini della radice: questo prodotto levato dal polinomio (γ) dà per differenza zero, e perciò i tre termini x^2-2x+3 formano la radice del polinomio (α).

Ecco il quadro di queste operazioni:

	$x^4-4x^3+10x^2-12x+9$ $-x^4$	x^2-2x+3
1.° resto	$-4x^3+10x^2-12x+9$ $+4x^3-4x^2$	$2x^2-2x$ $-2x$
2.° resto	$6x^2-12x+9$ $-6x^2+12x-9$	$2x^2-4x+3$ $+3$
3.° resto	0 0 0	

Esempi

Trovare le radici seconde dai seguenti polinomi:

1.° x^2-4x+4,

2.° $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$,

3.° $2x+3x^2+1+x^4+2x^3$,

4.° $\frac{4x^2}{9}+2x+\frac{9}{4}$,

5.° $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{17x^2}{18}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}$.

142. *Radice terza dei polinomi.* Per imparare ad estrarre la radice terza dai polinomi dobbiamo ricordare che dalla formola del *binomio* si ha

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c$$
$$+3b^2c+3ab^2+3ac^2+3bc^2+6abc.$$

Dall' esame di questi due sviluppi sarà facile dedurre che per trovare la radice terza del polinomio ordinato

(a) $x^3+6x^2+12x+8$ si comincia dal cercare la radice terza del primo termine: questa è x; fattone il cubo x^3, questo si sottrae dal polinomio dato, e si avrà per residuo

(b) $6x^2+12x+8$. Importa avvertire che in questo residuo si deve trovare il triplo del quadrato della prima parte della radice moltiplicato per la seconda, più il triplo della prima nel quadrato della seconda parte, più il cubo di questa: e perciò per trovare il secondo termine della radice si dovrà dividere il primo termine del polinomio (b) pel triplo del quadrato del primo termine della radice: essendo 2 il quoziente, questo sarà l' altra parte della radice. Per assicurarsi poi che questa è veramente la seconda parte della radice, si sottrae dal residuo (b) il triplo del quadrato della prima parte della radice moltiplicato per la seconda, più il triplo del quadrato di questa moltiplicato per la prima, più il cubo della seconda parte, e siccome non vi rimane residuo, così concludo che la radice cercata è $x+2$.

Ecco come si può disporre l' operazione:

	$x^3+6x^2+12x+8$	$x+2$
	$-x^3$	
1.° residuo	$6x^2+12x+8$	$3x^2$
	$-6x^2-12x-8$	
2.° residuo	0 0 0	$3x^2.2+3.x.4+8$

143. Si voglia estrarre la radice cubica dal polinomio ordinato

$$(k)\ x^5+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1\ .$$

La radice terza del primo termine è x^2, e fattone il cubo si sottragga questo dal polinomio (k), si avrà il residuo

(k') $3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$. Per avere il secondo termine della radice si divida il primo termine di questo residuo (k') pel triplo del quadrato del primo termine della radice: si ha per primo quoziente x che sarà la seconda parte della radice.

Ora si sottragga dal polinomio (k') il triplo del quadrato della prima parte della radice moltiplicato per la seconda, più il triplo della prima moltiplicato pel quadrato della seconda, più il cubo di questa, si avrà per residuo

(k'') $3x^4+6x^3+6x^2+3x+1$. Per trovare la terza parte della radice supporremo che i due termini già trovati formino la prima parte, e divideremo il primo termine dell' ultimo residuo (k'') pel triplo del quadrato di questa prima parte composta dei due primi termini della radice; si ha per primo quoto **1**, il quale sarà il terzo termine della radice.

Ecco il quadro delle operazioni.

	$x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$	x^2+x+1
	$-x6$	$3x^4$
1.° residuo	$3x^5+6x^4+7x^3+6x^2\pm 3x+1$	
	$-3x^5-3x^4-x^3$	$3.x^4.x+3.x^2x^2+x^3$
2.° residuo	$3x^4+6x^3+6x^2+3x+1$	
	$-3x^4-6x^3-6x^2-3x-1$	$3(x^2+x)^2$
3.° residuo	0 0 0 0 0	$3(x^2+x)^2.1+3.(x^2+x).1^2\pm 1^3$

144. Se da un polinomio P si vuole estrarre la radice sesta, basterà dal medesimo estrarre la radice seconda, e poscia la radice terza, perchè (n.° 53) sappiamo che

$$\sqrt[6]{P}=\sqrt[2,3]{P}=\sqrt[3]{\sqrt{P}}.$$

Così in generale se si deve estrarre da un polinomio la radice il cui indice sia un numero formato dei soli fattori primi 2 e 3, si può estrarre dal medesimo successivamente la radice seconda tante volte quanti sono i fattori 2, e la radice terza quanti sono i fattori 3.

145. *Estrazione di radice* m^{esima}. Prima d' insegnare questa estrazione di radice giova premettere che se si hanno due polinomi funzioni di una medesima variabile x, qualora questi debbano essere eguali fra di loro qualunque sia il valore della x, i coefficienti delle medesime potenze di x nei due polinomi saranno eguali fra di loro. Infatti abbiasi l' eguaglianza

$$(1)\quad a+bx+cx^2+dx^2+\ldots=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$$

Dovendo esistere questa eguaglianza qualunque sia il valore della x, se si fa questo eguale allo zero, si ha $a=A$: tolte queste quantità eguali dalla (1) si avrà l' altra

$$bx+cx^2+dx^3+\ldots=Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$$

la quale divisa per x diventa

$$(2)\quad b+cx+dx^2+\ldots=B+Cx+Dx^2+\ldots$$

Egualmente qui fatto $x=0$, si ottiene $b=B$: le quali quantità sottratte da' due membri della (2) ci danno

$cx+dx^2+\ldots=Cx+Dx^2+\ldots$ che divisa per x

si cambia nella

(3) $c+dx+\ldots=Cx+Dx+\ldots$

Seguitando si dimostrerebbe che si ha $c=C$, $d=D\ldots$

Abbiasi ora un polinomio P ordinato secondo le potenze decrescenti dell' incognita x, dal quale si voglia estrarre la radice m^{esima}.

Nel n.° 24 già ricordato in questo paragrafo abbiamo che il primo e l' ultimo termine del polinomio *radice* sono rispettivamente la radice del primo e dell' ultimo termine del polinomio *potenza.* Da ciò sarà facile calcolare il primo termine della radice, allorchè il polinomio proposto sia ordinato secondo le potenze decrescenti di una lettera. Se dal polinomio $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots$ si volesse estrarre la radice m^{esima}, evidentemente il primo termine di questa sarebbe $\sqrt[m]{ax^m}=x\sqrt[m]{a}$.

146. Conosciuto il primo termine della radice, vediamo come si possano determinare successivamente tutti gli altri.

Sia P il polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della incognita x, k sia il primo termine della radice, e z sia la somma degli altri termini della radice che restano da determinarsi. Avremo l' equazione identica

$$(a)\qquad P=(k+z)^m,$$

e pel *binomio* di Newton sarà

$$(b) \qquad P = k^m + mk^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}k^{m-2}z^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}k^{m-3}z^3 + \ldots + z^m,$$

e trasportando k^m nel primo membro si otterrà

$$(c) \qquad P - k^m = mk^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}k^{m-2}z^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}k^{m-3}z^3 + \ldots + z^m;$$

fatte le riduzioni, i primi termini dei due membri di questa eguaglianza saranno eguali fra di loro, perchè i due membri debbono essere eguali qualunque sia il valore della incognita x. Nel primo membro, essendo P e k cogniti, sarà facile calcolare il primo termine; nel secondo membro poi il primo termine sarà il primo termine di $mk^{m-1}z$, perchè questo è di grado superiore ai termini seguenti che contengono $k^{m-2}z^2$, $k^{m-3}z^3$, ...
Infatti k essendo il primo termine della radice è di grado superiore a quello degli altri termini contenuti in z, e di più nel primo termine $mk^{m-1}z$ si vede che k è innalzato al massimo esponente, mentre nei seguenti termini questo esponente va diminuendo.

Dunque chiamando p il primo termine di z, il prodotto di p per il fattore mk^{m-1} sarà eguale al primo termine del primo membro, e quindi p (secondo termine della radice) è il quoziente che si ottiene dividendo il primo termine del primo membro della equazione (c) per il fattore mk^{m-1}.

147. Troviamo con questo metodo la radice quinta dal polinomio

$$32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1\ ,$$

benchè dalla semplice ispezione si vegga che essa è $2x+1$, perchè $2x$ è la radice quinta del primo termine $33x^5$, ed 1 è la quinta radice dell' ultimo termine 1.

Per applicare questo metodo, trovato il primo termine $2x$ della radice, si chiami z l' altro termine: si avrà la relazione

$$32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1=(2x+z)^5=$$
$$(2x)^5+5(2x)^4z+10(2x)^3z^2+10(2x)^2z^3+5(2x)z^4+z^5,$$

la quale diventa

$$32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1=$$
$$32x^5+80x^4z+80x^3z^2+40x^2z^3+10xz^4+z^5.$$

Trasportando il primo termine del secondo membro nel primo membro rimarrà

$$80x^4+80x^3+40x^2+10x+1=$$
$$80x^4z+80x^3z^2+40x^2z^3+10xz^4+z^5:$$

i due primi termini dovendo essere eguali, sarà

$$80x^4=80x^4z\ ,\ \text{da cui}$$
$$z=\frac{80x^4}{80x^4}=1\ .$$

Dunque il secondo termine della radice è 1, e perciò la radice cercata sarà $2x+1$, come è facile averne la prova col fare la quinta potenza della stessa radice $2x+1$.

148. Vediamo ora come si possa applicare questo metodo per trovare gli ultimi termini della radice, quando invece di conoscere soltanto il primo, siano noti i primi n termini della medesima.

Per fare questo basterà risolvere il seguente quesito: *Conosciuti gli n primi termini della radice, trovare l'* $(n+1)^{\text{esimo}}$.

Chiamato P il polinomio dato, Σ la somma degli n primi termini della radice, e z la somma dei termini che restano da determinarsi si avrà

$$(\alpha) \qquad P=(\Sigma+z)^m,$$

da cui

$$(\beta) \quad P=\Sigma^m+m\Sigma^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{2}\Sigma^{m-2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Sigma^{m-3}z^3+\ldots+z^m,$$

e trasportato il termine Σ^m nel primo membro si avrà l'altra equazione

$$(\gamma) \quad P-\Sigma^m=m\Sigma^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{2}\Sigma^{m-2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Sigma^{m-3}z^3+\ldots\ldots+z^m.$$

Per le considerazioni fatte sulle equazioni (c) (n.°146) sarà facile calcolare il primo termine del primo membro; ed il primo termine del secondo membro sarà il primo termine contenuto nella espressione $m\,\Sigma^{m-1}z$. Perciò chiamato p il primo termine contenuto in z il prodotto di p per il primo termine contenuto in $m\,\Sigma^{m-1}$ sarà eguale al primo termine del primo mem-

bro della equazione (γ), e quindi p sarà il quoziente che si ottiene col dividere il primo termine del primo membro per il primo termine contenuto in $m\ \Sigma^{m-1}$.

Il primo termine contenuto in $m\ \Sigma^{m-1}$ è uguale a m volte la $(m-1)^{esima}$ potenza del primo termine della radice, e quindi nelle divisioni che danno i termini successivi della medesima, il divisore è sempre lo stesso: il dividendo invece cangia per ogni operazione, poichè, Σ contenendo ogni volta un termine di più, il primo termine del primo membro $P-\Sigma^m$ cangia per ogni operazione.

Da ciò nasce la seguente regola per estrarre la radice m^{esima} da un polinomio P ordinato secondo le potenze decrescenti di una lettera: si estragga la radice m^{esima} dal primo termine e si otterrà il primo termine della radice dimandata: la potenza m^{esima} di questo termine si sottragga dal polinomio P, e si divida il primo termine del polinomio residuo per m volte la potenza $(m-1)^{esima}$ del termine trovato: il quoziente sarà il secondo termine della radice. Sottratta poscia da P la potenza m^{esima} della somma dei due termini trovati, il terzo termine della radice sarà il quoziente che si ottiene dal dividere il primo termine del nuovo polinomio residuo per m volte la potenza $(m-1)^{esima}$ del primo termine trovato.

Così continuando le operazioni, finchè si arrivi ad un *resto* zero, si avranno tutti i termini della radice cercata. Se nel fare queste successive operazioni accade che non si possono eseguire tutte le divisioni si conclude che il polinomio dato non è una potenza m^{esima} perfetta.

Applicazione. Trovare la radice seconda col metodo ora spiegato dal polinomio

(1) $x^6+4x^5+6x^4+6x^3+5x^2+2x+1$.

Il primo termine della radice essendo x^3, e detta z la somma degli altri termini della radice, si avrà l' equazione identica

$$(2)\ x^6+4x^5+6x^4+6x^3+5x^2+2x+1= (x^3+z)^2=x^6+2x^3z+z^2;$$

la quale ridotta diventa

$$(3)\ 4x^5+6x^4+6x^3+5x^2+2x+1=2x^3z+z^2:$$

per trovare il secondo termine della radice si dovrà dividere il primo termine del polinomio residuo (3) pel doppio del primo termine della medesima radice: si avrà dunque $\frac{4x^5}{2x^3}=2x^2$, che sarà il secondo termine della radice.

Ora chiamata z' la somma de' termini incogniti della radice si avrà l' altra equazione

$$(4)\ x^6+4x^5+6x^4+6x^3+5x^2+2x+1= \{x^3+2x^2+z'\}^2=x^6+4x^5+4x^4+2x^3z'+4x^2z'+z'^2;$$

la quale ridotta si cambia nell' altra

$$(5)\ 2x^4+6x^3+5x^2+2x+1=2x^3z'+4x^2z'+z'^2:$$

per trovare il terzo termine della radice bisogna dividere il primo termine del polinomio residuo (5) pel doppio del primo termine della radice: si avrà perciò $\frac{2x^4}{2x^3}=x$, che sarà il terzo termine della radice.

Finalmente chiamata z'' la somma degli altri termini incogniti della radice si avrà la relazione

$$(6)\ x^6+4x^5+6x^4+6x^3+5x^2+2x+1= \{x^3+2x^2+x+z''\}^2=x^6+4x^5+6x^4+4x^3+ x^2+2x^3z''+2x^2z''+2xz''+z''^2:$$

fatte le riduzioni si ricava l' altra

$$(7)\ 2x^3+4x^2+2x+1=2x^3z''+2x^2z''+2xz''+z''^2.$$

Il quarto termine della radice verrà dato dal dividere il primo termine del polinomio residuo (7) pel doppio del primo termine della radice: si avrà dunque $\frac{2x^3}{2x^3}=1$, che sarà il quarto termine della radice.

Proseguendo l' operazione il polinomio residuo sarebbe zero, e perciò il quarto termine è l' ultimo della radice.

Esempi

1.° Estrarre la radice seconda del polinomio

$$x^4-4x^3+8x^2-8x+4.$$

2.° Trovare la radice terza del polinomio

$$x^5-x^4-5x^3+(x^3+x^2)^2+3x-1.$$

3.° Estsarre la radice quinta dal polinomio.

$$x^5-14.x^4+38x^3-97.x^2+(2x^2+x)^2+ (4x+2)^2+64x-36.$$

CAPITOLO VI.

DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO E DI QUELLE CHE SI RIDUCONO AL SECONDO GRADO

---

§. 1. Risoluzione delle equazioni di secondo grado.

149. Tutte le equazioni di secondo grado ad una sola incognita si possono ridurre alla forma dell' equazione generale

(1) $\quad x^2+px+q=0,$

dove x è l' incognita, p e q sono quantità note.
Infatti abbiasi l' equazione di secondo grado

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha_, x^2+\beta_, x+\gamma_, :$$

trasportati i termini del secondo membro nel primo si avrà

$(\alpha-\alpha_,)x^2+(\beta-\beta_,)x+\gamma-\gamma_,=0$, e dividendo questa per $\alpha-\alpha_,$ si avrà l' altra

$$x^2+\frac{\beta-\beta_,}{\alpha-\alpha_,}x+\frac{\gamma-\gamma_,}{\alpha-\alpha_,}=0\,;$$

la quale, fatto $\frac{\beta-\beta_,}{\alpha-\alpha_,}=p$, $\frac{\gamma-\gamma_,}{\alpha-\alpha_,}=q$, si cambia nella generale $x^2+px+q=0$.

Da ciò si conclude che se sapremo risolvere l' equazione generale (1), sapremo ancora sciogliere qualsiasi altra equazione di secondo grado ad una sola incognita, poichè basterà prima ridurla alla formola generale.

$$(2) \qquad x^2+px=-q.$$

Il primo membro di questa, essendo un binomio, (n.° 48 e 132) non può essere un quadrato perfetto: ma se confrontiamo questo primo membro collo sviluppo del quadrato del binomio $x+\frac{p}{2}$ che è

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

si vede che il primo membro dell' equazione (2) diventerebbe un quadrato perfetto qualora vi si aggiungesse il termine $\frac{p^2}{4}$.

Pertanto aggiungendo ad ambi i membri dell' equazione (2) la quantità $\frac{p^2}{4}$, si avrà l' altra

$$(3) \qquad x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

ossia $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q;$

estraendo la radice seconda dai due membri di questa si otterrà

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}:$$

ma poichè la radice seconda di una quantità (n.° 49) può essere positiva o negativa, così il segno radicale dovrà essere preceduto dal doppio segno $\pm$, e quindi l' ultima equazione si dovrà scrivere

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

da cui

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \tag{4}$$

Pel doppio segno del radicale l' incognita x ha dunque due valori, che si chiamano (n.° 74) *radici* dell' equazione, le quali chiamate x_1, x_2, verranno espresse separatamente dalle

$$(5)\quad \begin{cases} x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \end{cases}$$

151. Confrontata l' equazione generale (1) coll' equazione (4) di risoluzione si scorge che per risolvere qualunque equazione di secondo grado ad un' incognita si deve ridurla alla forma $x^2+px+q=0$, e poscia fare l' incognita *eguale alla metà del coefficiente del secondo termine col segno cambiato, più o meno la radice seconda della somma del quadrato della metà del detto coefficiente più il terzo termine col segno cangiato.*

Applicazioni. Risolviamo alcune equazioni di secondo grado.

1.° Sia data l' equazione

$$x^2-5x+6=0:$$

poichè (essendo l' equazione già ridotta alla forma generale) l' incognita deve essere eguale alla metà del coefficiente del secondo termine col segno cambiato, più o meno la radice seconda della somma del quadrato della metà di detto coefficiente, più il terzo termine col segno cambiato, sarà

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6},$$

da cui

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$$

quindi le due *radici* saranno

$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3,$$

$$x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

2.° Abbiasi da risolvere l' equazione

$$6+x^2=7x:$$

ridotta alla forma generale diverrà

$$x^2-7x+6=0,$$

da cui

$$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-6},$$

ossia

$$x=\frac{7}{2}\pm\frac{5}{2},$$

e perciò le due radici dell' equazione saranno

$$x_{,}=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=\frac{12}{2}=6,$$

$$x_{,,}=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

3.° Risolvere l' equazione

$$12x^2-3=5x:$$

ridotta alla forma generale diventa

$$x^2-\frac{5x}{12}-\frac{3}{12}=0,$$

da cui

$$x=\frac{5}{24}\pm\sqrt{\frac{25}{(24)^2}+\frac{3}{12}},$$

la quale si cambia nella

$$x=\frac{5}{24}\pm\frac{13}{24},$$

perciò le due radici saranno

$$x_{,}=\frac{5}{24}+\frac{13}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4},$$

$$x_{,,}=\frac{5}{24}-\frac{13}{24}=-\frac{8}{24}=-\frac{1}{3}.$$

4.° Risolvere l' equazione

$$ax^2+bx+c=o:$$

divisa questa per a si cangia nell' altra

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=o,$$

dalla quale si ricava

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

ovvero

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}},$$

e perciò le due radici saranno

$$x_{,}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_{,,}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esempi

Trovare le radici delle equazioni

1.ª $5x^2+3+x=12x-7+4x^2$,

2.ª $bx^2-ax=a^2$,

3.ª $(a+x)^2+(a-x)^2=4ax+4a^2$,

4.ª $x^2-3x=-2$,

5.ª $14.x^2+5x=1$,

6.ª $S=cx+\frac{gx^2}{2}$,

7.ª $\frac{a}{b}+\frac{bx}{c}+\frac{cx^2}{d}=0$,

8.ª $x(x+a)+a(x+c)=ac-a^2$,

9.ª $(a+x)(a-x)=a^2-x^2+x^2-8x+15$,

10.ª $x^2-x=-\frac{1}{4}$.

152. Qualche volta accade che si ha da risolvere un' equazione, la cui incognita si trova sotto un segno radicale: in questo caso si deve isolare il radicale col lasciarlo solo in un membro, e trasportando tutti gli altri termini nell' altro membro; poscia si elevano ambi i membri ad una potenza di un grado eguale all' indice del radicale.

Se si avesse da risolvere l' equazione

$$y+1+\sqrt{y}=5-\frac{y}{2},$$

isolando il radicale, questa diverrà

$$\sqrt{y}=4-\frac{3y}{2},$$

e fattone il quadrato si otterrà

$$y=16-12.y+\frac{9y^2}{4},$$

della quale è facile trovare la soluzione.

Esempi

Risolvere l' equazione

1.ª $\frac{3\sqrt{2z}}{2}+z+1=0$;

2.ª $\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+\frac{\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt{y}}{3}+y+\sqrt{y}=1$;

3.ª $\frac{3\sqrt{3z}}{z}+\frac{1}{z}+2=0$.

153. *Relazioni fra le radici dell' equazione* $x^2+px+q=o$, *ed i suoi coefficienti* p, q.

Per trovare queste relazioni scriviamo separatamente le due radici dell' equazione generale che sono

$$(h)\left\{\begin{array}{l} x_{,}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ x_{,,}=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,; \end{array}\right.$$

fatta la somma avremo

$$(k) \qquad x_{,}+x_{,,}=-p,$$

nella quale si legge che la *somma delle due radici è uguale al coefficiente del secondo termine col segno cangiato.*

Se invece di sommare, si moltiplicano le due radici (4) si avrà l' equazione

$$x_{,}x_{,,}=\frac{p^2}{4}-\frac{p}{2}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\left\{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right\}^2$$
$$+\frac{p}{2}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

la quale ridotta diventa

$$(k') \qquad x_{,}.x_{,,}=q\ ,$$

ove si scorge che il *prodotto delle due radici è uguale al terzo termine.*

Queste due relazioni fra le due radici ed i coefficienti sono molto utili e servono in modo speciale a costruire l' equazione quando sono date le radici.

Se p. es. si volesse formare l' equazione che abbia per radici 2 e 3, dovrà essere $p=-(2+3)=-5$, $q=2.3=6$, e perciò l' equazione richiesta sarà

$$x^2-5x+6=0\ .$$

Infatti questa risolta col metodo già noto ci dà

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}\ ,$$

da cui

$$x_{,}=3\ ,$$
$$x_{,,}=2\ .$$

Così pure volendo costruire un' equazione colle radici $\frac{1}{4}$ e $-\frac{2}{5}$, si dovrà porre

$$p=-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)=-\left(\frac{5}{20}-\frac{8}{20}\right)=+\frac{3}{20},$$

$$q=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{2}{20};$$

e perciò l' equazione dimandata sarà

$$x^2+\frac{3x}{20}-\frac{2}{20}=0,$$

ovvero

$$20.x^2+3x-2=0.$$

Esempi

Costruire equazioni di secondo grado colle seguenti coppie di radici e colla incognita y.

1.ª $y_{,}=1$, $y_{,,}=-8$;

2.ª $y_{,}=a$, $y_{,,}=\frac{a}{2}$;

3.ª $y_{,}=\frac{1}{2}$, $y_{,,}=-\frac{3}{4}$;

4.ª $y_{,}=-\frac{4}{5}$, $y_{,,}=-\frac{5}{6}$;

5.ª $y_{,}=\frac{a}{b}$, $y_{,,}=\frac{b}{a}$.

154. *Scomposizione del trinomio x^2+px+q nel prodotto di due fattori binomi.*

Nella equazione generale

$$x^2+px+q=0$$

si sostituiscano invece di p e q i suoi valori tolti dalle relazioni precedenti (k) e (k'): si avrà

$$x^2-(x_{,}+x_{,,})x+x_{,}x_{,,}=0,$$

ovvero

$$x^2-x_{,}.x-x_{,,}x+x_{,}x_{,,}=0,$$

ed anche

$$x(x-x_{,})-x_{,,}(x-x_{,})=0\ ,$$

e raccogliendo il fattor comune a due termini si ha

$$(m)\qquad (x-x_{,})\ (x-x_{,,})=0\ ,$$

nella quale si legge che il trinomio x^2+px+q è stato trasformato nel prodotto di due fattori binomi i quali si ottengono sottraendo dalla incognita successivamente le due radici.

Questa proprietà ci fornisce un altro mezzo per formare l' equazione quando sono date le radici: infatti se queste saranno

$$x_{,}=a\ ,\ \ x_{,,}=b\ ,$$

l' equazione dimandata verrà espressa dalla

$$(x-a)\ (x-b)=0\ ,$$

ovvero dall' altra

$$x^2-(a+b)x+ab=0\ .$$

155. *Discussione sulla formola di risoluzione*

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ .$$

Abbiamo notato (n.° 67) che quando sotto un radicale di indice pari la quantità è negativa, la radice è imaginaria, e perciò se nella equazione

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

sarà $\frac{p^2}{4}-q<0$, i due valori della x saranno *imaginarii;* se invece si avrà $\frac{p^2}{4}-q>0$, le due radici sa-

ranno reali. Da queste condizioni dedurremo dunque che le radici saranno imaginarie o reali secondo che il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine nella equazione generale $x^2+px+q=0$ sarà minore o maggiore del terzo termine.

Ma $\frac{p^2}{4}$ essendo un quadrato perfetto è sempre positivo, dunque affinchè le radici siano imaginarie, il terzo termine q, dovendosi prendere col segno cangiato, dovrà essere positivo, e (fatta astrazione dal segno) dovrà pure essere maggiore di $\frac{p^2}{4}$.

È degno l' osservare che non vi può essere una sola radice imaginaria, ma sono od ambedue reali, ovvero ambedue imaginarie: in questo ultimo caso si chiamano (n.° 71) *conjugate*, le quali facilmente si possono ridurre alle forme

$$a+b\sqrt{-1}$$

$$a-b\sqrt{-1}$$

Se poi nell' equazione di risoluzione la quantità sotto il segno radicale fosse eguale allo zero, ossia si avesse

$$\frac{p^2}{4}-q=0\ ,$$

il radicale e il doppio segno $\pm$ sparirebbero, e le due radici sarebbero eguali. Da ciò si conclude che le radici sono eguali quando il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine sia eguale al terzo termine purchè questo sia positivo.

Le tre equazioni

1.ª $x^2-8x+17=0$,
2.ª $y^2+10=2y$,
3.ª $z^2+12=z$,

avranno radici reali, o imaginarie, o eguali?

156. *Discussione della formola generale* $x^2+px+q=0$.

I due coefficienti p, q di questa equazione possono essere eguali allo zero, positivi o negativi: supporremo sempre positivo il coefficiente del primo termine, poichè se fosse *zero*, l' equazione non sarebbe più di secondo grado, e se fosse negativo, si potrebbe sempre farlo diventare positivo col moltiplicare ambi i membri dell' equazione per -1.

Discutiamo separatamente questi diversi casi.

1.° Se il coefficiente p è uguale allo zero, l' equazione generale diventa

$$(n) \quad x^2+q=0,$$

ovvero
$$x^2=-q,$$

ed estraendo la radice seconda da ambi i membri si ha
$$x=\pm\sqrt{-q},$$

e quindi si ottengono le due radici eguali e di segno contrario

$$x_{,}=+\sqrt{-q},$$
$$x_{,,}=-\sqrt{-q}.$$

Questi due valori si potevano pure avere dalla formola generale di risoluzione, se alla p si sostituisce lo zero. L' equazione (n) $x^2+q=0$, che non contiene la prima potenza dell' incognita, dicesi equazione di secondo grado *pura*, o *binomia*, o *incompleta*, mentre la generale $x^2+px+q=0$ si chiama equazione di secondo grado *completa* o *trinomia*.

2.° Supponiamo $q=0$; l' equazione generale diventa

$$(n) \quad x^2+px=0,$$

la quale si può mettere anche sotto la forma

$$x(x+p)=0.$$

Il primo membro di quest' equazione il quale è composto di due fattori, dovendo essere zero, potrà venire soddisfatto tanto da $x=0$, quanto da $x+p=0$, ossia da $x=-p$, e quindi nel caso di $q=0$, le due radici sono

$$x_{,}=0, \qquad x_{,,}=-p.$$

Queste medesime radici si potevano ottenere anche dall' equazione generale di risoluzione ponendovi invece di q lo zero.

3.° Se i due coefficienti sono contemporaneamente zero, l' equazione generale diventa $x^2=0$, e le due radici si annullano, avendosi $x_{,}=0$, $x_{,,}=0$.

4.° Sia $p>0$, $q>0$. Dalle relazioni fra questi coefficienti e le radici avendo visto che p è uguale alla somma delle radici col segno cambiato, e q eguaglia il prodotto delle medesime, la somma delle due radici dovrà essere negativa, ed il prodotto dovrà essere invece positivo. Dunque le due radici dovranno avere il medesimo segno, ed essere negative.

5.° Abbiasi $p>$, $q<0$. In questo caso il prodotto dovendo essere negativo, le due radici saranno di segno contrario; e perchè la somma deve essere negativa, perciò, fatta astrazione dal segno, la negativa sarà maggiore della positiva.

6.° Si abbia $p<0$, $q<0$. Le due radici avranno il medesimo segno, e saranno positive.

7.° Finalmente supponiamo che sia $p<0$, $q<0$. Le radici avranno segno contrario; la somma dovendo essere positiva, la radice negativa sarà la minore.

157. I quattro ultimi casi fanno vedere che dalla semplice ispezione della equazione generale si possono determinare i segni delle sue radici. Ora volendo riassumere questi quattro casi in un quadro solo, chiamiamo $x_{,}$ la radice maggiore (fatta astrazione dal segno) e $x_{,,}$ l' altra, ed avendo supposto che il coefficiente 1 del primo termine sia sempre positivo avremo che

se	sarà	1	p	q	si	otterrà	$x_{,}$	$x_{,,}$
»	»	+	+	+	»	»	—	—
»	»	+	+	—	»	»	—	+
»	»	+	—	+	»	»	+	+
»	»	+	—	—	»	»	+	—

Il succedersi di due segni differenti fra due termini successivi dell' equazione si chiama *variazione*, ed il succedersi di due segni simili si chiama *permanenza*. Analizzando il quadro superiore si scorge che quando si hanno due *permanenze*, ambe le radici sono negative, e quando si hanno due *variazioni* le radici sono

positive: se poi si avrà una *variazione* ed una *permanenza,* le due radici saranno di segno contrario, e la radice maggiore (astrazione fatta dal segno) sarà positiva o negativa secondo che si avrà prima una *variazione,* o una *permanenza.* Queste considerazioni suppongono che le radici siano reali, poichè, quando sono imaginarie, esse non esistono e non sono perciò nè positive nè negative.

Questa proposizione sulla relazione fra i segni dei termini di una equazione di secondo grado e le sue radici è anche vera qualunque sia il grado dell' equazione, purchè contenga soltanto radici reali. Questa importante proposizione generale è dovuta a CARTESIO nato nel 1596 e morto nel 1650.

Esempi

1.° Nell' equazione $x^2-6x+8=0$
il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine essendo maggiore del termine cognito, le due radici saranno entrambe positive.

2.° L' equazione $y^2+\frac{5y}{12}-\frac{1}{4}=0$
ha le due radici reali, e contenendo una *permanenza,* e poscia una variazione le due radici saranno di segno contrario, delle quali la negativa sarà numericamente la maggiore.

3.° L' equazione

$$y^2+11y+28=0$$

ha le due radici reali, ed avendo due permanenze, le radici saranno ambedue negative.

158. Mettiamo qui alcuni problemi che vengono espressi da equazioni di secondo grado.

Problema 1.° Dividere il numero 8 in due parti tali che il loro prodotto valga $\frac{44}{9}$.

L' impianto del problema potrà venire espresso dalla equazione

$$z(8-z)=\frac{44}{9},$$

ovvero

$$z^2-8z+\frac{44}{9}=0,$$

della quale è facile trovare le due radici che rappresenteranno le due parti del numero proposto.

Problema 2.° Trovare il raggio di un circolo, la cui area sia eguale a cento metri quadrati.

Questo problema verrà espresso dalla equazione

$$\pi r^2=100,$$

dove r è l' incognita, e $\pi=3,14\ldots.$

Problema 3.° Il numero esprimente l' area di un quadrato è uguale al numero che rappresenta il suo perimetro: trovarne il lato.

Problema 4.° Trovare i due numeri, dei quali la somma è $\frac{9}{20}$, ed il prodotto è -1.

Problema 5.° Trovare un numero, la cui radice moltiplicata per 4 sia eguale al numero stesso aumentato di 3.

Problema 6.° Trovare il valore del lato del decagono regolare inscritto in un circolo di raggio eguale a 1.

Problema 7.° Uno scolaro comprò libri usati per lire 25: ne tenne per proprio uso 50 chilogrammi dei migliori, e vendendo i rimanenti a 25 centesimi per ogni chilogrammo sopra il loro costo, ricavò quanto aveva speso. Quanti chilogrammi di libri avrà comperato?

Problema 8.° Trovare un numero il quale sommato col suo quadrato faccia 20.

Problema 9.° Trovare il peso di una sfera, supposto che la sua superficie sia una centiara, ed il suo peso specifico sia 3,03.

Problema 10.° Trovare il valore del lato l del quadrato espresso in funzione del raggio r del circolo circoscritto.

Problema 11.° Trovare la circonferenza di un circolo di area eguale ad un ettare.

Problema 12.° Trovare il valore del lato l' del triangolo equilatero espresso in funzione del raggio r del circolo circoscritto.

Problema 13.° Costruire l' equazione che ha le radici $x_{,}=\frac{3}{4}$, $x_{,,}=\frac{4}{5}$.

Problema 14.° Trovare il valore del lato l'' del decagono regolare espresso in funzione del raggio r'' del circolo circoscritto.

Problema 15.° Trovare il volume di un cono, nel quale il diametro della base è uguale a 3 metri e l' altezza è uguale alla circonferenza della base.

Problema 16.° Trovare il volume del tronco di cono a basi parallele supposto che la circonferenza della base superiore sia un decametro, il diametro della base inferiore un decametro, e l' altezza pure un decametro.

Problema 17.° Costruire l' equazione che abbia per radici $x_{\prime}=\frac{a}{b}$, $x_{\prime\prime}=\frac{b}{a}$.

Problema 18.° Trovare il peso P di un cilindro alto 3 metri, nell' ipotesi che il diametro sia metri 0,3, ed il peso specifico sia $p=1,01$.

Problema 19.° Trovare le dimensioni di un rettangolo colla condizione che l' area sia un ettare, e l' altezza doppia della base.

Problema 20.° Risolvere le equazioni

1.ª $(1+x)^2-(1-x)^2+(1+x)^3-x^3=0$

2.ª $a\sqrt{x}+ax+b\sqrt{x}+bx+c=0$

3.ª $\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{3+x}=0$.

§. 2. Risoluzione delle equazioni ad un' incognita che si riducono a quelle di secondo grado.

159. La risoluzione delle equazioni *trinomie* della forma

$$(a) \qquad x^{2m}+px^m+q=0 ,$$

nelle quali l' incognita entra solo in due termini con due esponenti differenti uno doppio dell' altro, si fa dipendere da quella di un' equazione di secondo grado, e di un' equazione *binomia*.

Infatti se si pone $x^m=z$, l' equazione (1) diventerà

$$z^2+pz+q=0 ,$$

da cui

$$z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

e sostituendovi il valore di z si avrà

$$x^{m}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

dalla quale estratta la radice m^{esima} si otterrà

$$(b)\qquad x=\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

160. Se si suppone $m=2$, l' equazione generale *trinomia* (a) diviene di quarto grado, detta *biquadratica,* perchè non contiene che il quadrato dell' incognita, ed il quadrato di questo quadrato, e prende la forma

$$(a')\qquad x^4+px^2+q=9.$$

In questa equazione fatto $x^2=z$, si avrà

$$z^2+pz+q=0,$$

dalla quale

$$z=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

e sostituendovi il valore di z si otterrà

$$x^2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

dalla quale

$$(b)\qquad x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}}}.$$

Questa formola ci mostra che l' equazione *biquadratica* ha quattro radici, potendo combinare a due a due in quattro maniere diverse i quattro *segni* dei due radicali.

Se i due valori di z ovvero di x^2 sono positivi, le quattro radici dell' equazione *biquadratica* sono *reali*, eguali a due a due, ma l' una positiva e l' altra negativa.

Quando uno dei valori di z è positivo e l' altro negativo, l' equazione ha due radici reali, due radici *imaginarie*.

Finalmente se i due valori di z sono negativi o imaginari, l' equazione ha tutte le *radici imaginarie*.

Applicazioni. Si voglia risolvere l' equazione

$$x^4-13x^2+36=0.$$

Fatto $x^2=z$ si avrà

$$z^2-13z+36=0\,,\ \text{da cui}$$

$$z=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}\,,\quad \text{ossia}$$

$$z=\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2}\,,$$

e sostituendovi x^2 invece di z si avrà

$$x^2=\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2}\,,$$

da cui

$$x=\pm\sqrt{\frac{13}{2}\pm\frac{5}{2}}\,,$$

perciò avremo i quattro valori seguenti

$$x_{,}=+\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}}=3\,,$$

$$x_{,,}=-\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}}=-3\,,$$

$$x_{,,,}=+\sqrt{\frac{13}{2}-\frac{5}{2}}=2\,,$$

$$x_{\text{iv}}=-\sqrt{\frac{13}{2}-\frac{5}{2}}=-2\,.$$

Così le radici dell' equazione biquadratica

$$x^4-26.x^2+25=0$$

sono

$$x_{,}=1,\ x_{,,}=-1,\ x_{,,,}=5,\ x_{\text{iv}}=-5.$$

Esempi

Risolvere le equazioni biquadratiche

1.ª $x^4-25x^2+144=0$,
2.ª $x^4-8x^2-9=0$,
3.ª $36x^4-13x^2+1=0$.

161. Se nella equazione (b')

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

facciamo $-\frac{p}{2}=a,\ \frac{p^2}{4}-q=b$,

si ha $x=\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}}\,.$

Se b è un quadrato perfetto, i quattro valori dell' incognita si possono trovare facilmente con una semplice estrazione di radice seconda da una quantità *razionale*: se poi b non è quadrato perfetto, ed ha un valore positivo, per avere i quattro valori della x bisogna estrarre la radice seconda da un binomio *irrazionale* della forma $a \pm \sqrt{b}$.

162. Siccome per trovare questi valori è utile qualche volta trasformare il radicale $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ nella somma di due radicali semplici, perciò vediamo ora come si possa effettuare questa trasformazione, ed in quali casi essa sia utile.

Premettiamo a questa operazione il seguente principio:

Se due formole composte di quantità razionali ed irrazionali sono eguali, le quantità razionali sono eguali fra loro, come pure le altre irrazionali.

Abbiasi l' eguaglianza

$$\alpha + \sqrt{\beta} = \alpha' + \sqrt{\beta'},$$

in cui β e β' non sono quadrati perfetti.

Trasportando α nel secondo membro si otterrà

$$\sqrt{\beta} = (\alpha' - \alpha) + \sqrt{\beta'},$$

ed innalzando i due membri al quadrato si avrà

$$\beta = (\alpha' - \alpha)^2 + 2(\alpha' - \alpha)\sqrt{\beta'} + \beta' :$$

il primo membro di questa equazione essendo *razionale*, lo dovrà essere pure il secondo: affinchè questo sia razionale è necessario che sparisca il fattore irrazionale $\sqrt{\beta'}$, ossia che $\alpha' - \alpha$ sia zero; dalla quale

condizione si ha $\alpha'=\alpha$: da questa eguaglianza ne consegue $\sqrt{\beta}=\sqrt{\beta'}$. Perciò nell' equazione data le quantità razionali sono eguali fra loro, come pure le irrazionali.

Ciò dimostrato poniamo

$$(1)\quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y};$$

nella quale vogliamo esprimere x e y razionalmente ed in funzione delle quantità a, b. Innalzando a quadrato i due membri si ha

$$(2)\quad a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

e per la proposizione precedente, affinchè questa eguaglianza esista, si dovranno avere le due relazioni separate

$$x+y=a,\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{b},$$

ossia

$$x+y=a$$
$$xy=\frac{b}{4}.$$

Per trovare i valori di x e y si costruisca un' equazione di secondo grado con l' incognita z e che abbia per radici x, e y: il coefficiente del secondo termine di questa equazione sarà eguale alla somma delle due radici col segno cambiato, ossia $-(x+y)=-a$, ed il terzo termine sarà il prodotto delle due radici, ossia $xy=\frac{b}{4}$, e perciò l' equazione richiesta sarà

$$z^2-az+\frac{b}{4}=0,$$

dalla quale

$$z=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{b}{4}},$$

ossia

$$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2};$$

perciò le due radici saranno

$$z_{,}=x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2};$$

$$z_{,,}=y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Questi valori saranno razionali nel solo caso che sia a^2-b un quadrato perfetto, e perciò il radicale $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ si trasformerà utilmente nella somma dei due radicali $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$ nel solo caso che sia a^2-b un quadrato perfetto.

Qualunque siano i valori di a e b si avrà dunque l' equazione di trasformazione

$$(3)\quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Se si volesse trasformare invece il radicale $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, operando come prima, si arriverebbe all' altra relazione

$$(4)\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Applicazioni. Volendo trasformare il radicale $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ nella somma di due radicali, confrontiamo questo colla (3) e si vedrà che $a^2-b=16-7=9$, e quindi $\sqrt{a^2-b}=\pm 3$.
Dunque

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{4+3}{2}}+\sqrt{\frac{4-3}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Così nel radicale $\sqrt{9+\sqrt{56}}$ si ha $a^2-b=81-56=25$, e perciò $\sqrt{a^2-b}=\pm 5$.
Dunque sarà

$$\sqrt{9+\sqrt{56}}=\sqrt{\frac{9+5}{2}}+\sqrt{\frac{9-5}{2}}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$$

Esempi

1.° Trasformare il radicale $\sqrt{6-\sqrt{11}}$ nella somma di due radicali semplici.

2.° Risolvere l' equazione $y^4-18y^2+36=0$.

3.° Trasformare il radicale $\sqrt{6+\sqrt{27}}$.

Dobbiamo a Diofanto (IV.° secolo) la risoluzione delle equazioni di 1.° e 2.° grado: ma siccome Diofanto nella sua Opera cita continuamente Autori indiani, così questi sono considerati i primi autori di questa importante ed utilissima scoperta.

Tuttavia, il libro di Diofanto non essendo stato conosciuto in Italia prima del XV.° secolo, e tradotto soltanto nel successivo XVI.°, dobbiamo a Leonardo Fibonacci (principio del secolo XIII.°) l' introduzione in Italia della risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado.

§. 3. Risoluzione di equazioni simultanee a più incognite di secondo grado.

163. La risoluzione delle equazioni simultanee è una delle questioni più importanti e più complicate dell' algebra superiore. Noi non possiamo occuparci che di alcuni casi speciali.

1.° *Si possono risolvere due equazioni generali a due incognite, una di primo e l' altra di secondo grado.*

Infatti sia dato il sistema delle due equazioni

$$(k)\quad \begin{cases} ax+by=c, \\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \end{cases}$$

Dalla prima si ha

$$(k')\qquad x=\frac{c-by}{a},$$

che sostituito nella seconda ci dà

$$A\left(\frac{c-by}{a}\right)^2+By.\frac{c-by}{a}+Cy^2+D.\frac{c-by}{a}+Ey+F=0$$

che è un' equazione di secondo grado contenente la sola y, della quale si ricaveranno due valori, a ciascuno dei quali corrisponderà un valore di x dato dalla formola (k').

2.° *Risoluzione di due equazioni particolari a due incognite ambedue di secondo grado.*

$$(m)\quad \begin{cases} a(x+y)=bxy, \\ x^2-y^2=bxy; \end{cases}$$

da queste due avremo

$$a(x+y)=x^2-y^2,$$

ovvero

$$a(x+y)=(x+y)(x-y),$$

la quale ridotta diventa

$$a=x-y,$$

da cui

$$x=a+y.$$

Sostituito questo valore nella prima delle (m) si avrà

$$a\{a+y+y\}=by.(a+y),$$

ossia

$$a^2+2ay=aby+by^2,$$

dalla quale si possono trovare i due valori della y, a ciascuno dei quali corrisponderà un valore della x.

Vogliasi risolvere il seguente problema:

Trovare due numeri tali, che la somma dei loro quadrati sia 34, ed il prodotto dei loro quadrati sia 225.

Il problema verrà rappresentato dal sistema delle due equazioni

$$x^2+y^2=34,$$
$$x^2y^2=225.$$

Per trovare i valori delle incognite ricorriamo all' artifizio di considerare x^2 e y^2 come due *radici* di un' equazione che abbia per incognita z: ricordando le relazioni che vi sono fra le radici di una equazione di secondo grado ad un' incognita ed i suoi coefficienti, facilmente si troverà

$$z^2-34z+225=0,$$

la quale avrà per radici x^2 e y^2: sciogliendo questa equazione avremo

$$z=17\pm\sqrt{17^2-225},$$

ovvero

$$z=17\pm8\ ,$$

e perciò si avranno i due valori

$$z_{,}=x^2=17+8=25\ ,$$
$$z_{,,}=y^2=17-8=9\ ;$$

dunque sarà $x=\sqrt{25}=\pm5$,

$$y=\sqrt{9}=\pm3\ ,$$

i quali saranno i due numeri ricercati.

Si deve sempre ricorrere a questo artifizio quando si tratta di determinare due numeri, di cui si conosce la somma e il prodotto.

3.° *Risoluzione di tre equazioni particolari a tre incognite, due di secondo grado ed una di primo.*

Abbiasi il sistema delle tre equazioni

$$(n)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=14\ , \\ xy=\dfrac{2.z}{3}\ , \\ x+y+z=4\ . \end{cases}$$

Moltiplico la seconda per 2, e poscia la sommo colla prima, avrò l' equazione

$$x^2+y^2+z^2+2xy=14+\frac{4z}{3}\ ,$$

ovvero

$$(n')\qquad (x+y)^2+z^2=14+\frac{4z}{3}\ ,$$

Dalla terza delle (n) si ha pure

$$x+y=4-z\,,$$

che sostituito nella (n') si avrà

$$(4-z)^2+z^2=14+\frac{4z}{3}\,,$$

della quale è facile la risoluzione per trovare il valore di z.

Trovato il valore di questa terza incognita, le due ultime delle (n) ci daranno facilmente i valori delle altre due incognite.

CAPITOLO VII.

DELLE DISUGUAGLIANZE.

§. 1. Principj generali relativi alle disuguaglianze.

164. Chiamasi *disuguaglianza* una formola algebrica contenente quantità note e quantità incognite, e composta di due parti disuguali, la prima delle quali dicesi il primo membro della disuguaglianza, e l' altra il secondo.

L' espressioni algebriche

$$
\begin{aligned}
&ay+b>\alpha y+\beta_{,},\\
&mz+n<m_{,}z+n_{,},\\
&\alpha x+\beta>0,\\
&\alpha_{,}x+\beta_{,}<0,
\end{aligned}
$$

saranno quattro disuguaglianze.

165. I principî stabiliti sulle equazioni possono in generale applicarsi alle disuguaglianze; ma vi sono alcuni casi nei quali si commetterebbero errori per l' introduzione di quantità negative nelle trasformazioni delle disuguaglianze.

Prima di vedere quali siano i principî generali relativi alle disuguaglianze giova ricordare (n.° 6) che una quantità positiva è tanto più grande, quanto è più lontana da zero, e la negativa quanto vi è più vicina; quindi le quantità positive sono maggiori di zero e delle quantità negative, e queste sono minori di zero e delle positive: di due quantità negative poi sarà maggiore quella che, fatta astrazione dal segno, sarà la minore.

Così avremo le seguenti relazioni

$$a>0\ ,\ a>-b\ ,\quad 10>0\ ,\quad 10>-100\ ;$$
$$-a<0\ ,\ -a<b\ ,\ -10<0\ ,\ -10>-100\ .$$

Ciò premesso troviamo le principali proprietà delle disuguaglianze.

166. Proposizione 1.ª *Non si altera una disuguaglianza se si aggiunge o si toglie a' due membri una medesima quantità.*

Così se P>Q, sarà pure P±K>Q±K: poichè la differenza fra le quantità P e Q non cangia aumentandole o diminuendole ugualmente, e perciò la primitiva disuguaglianza rimane medesimamente.

Da ciò ne segue che, come nell' equazione, si possono trasportare i termini di una disuguaglianza da un membro all' altro cambiando loro il segno.

Si intenderanno facilmente e saranno vere le seguenti trasformazioni di disuguaglianze

1.ª $x+a>0$, ovvero $x>-a$;
2.ª $5x+a>4x+b$, o $x>b-a$;
3.ª $10x+10>9x+8$, ossia $x>-2$.

167. Proposizione 2.ª *Si possono moltiplicare o dividere ambi i membri di una disuguaglianza per una stessa quantità positiva.*

Infatti dalla disuguaglianza P>Q, trasportando Q nel primo membro si avrà P—Q>0 : dunque la differenza P—Q è positiva: e moltiplicata per una quantità positiva m, il prodotto Pm—Qm sarà pure positivo, e si potrà scrivere

$$Pm-Qm>0\ ,$$

ovvero per la 1.ª proposizione

$$Pm>Qm\ ,$$

la quale è la proposta disuguaglianza moltiplicata per la quantità positiva m.

Se m fosse frazionario, ciò che si è dimostrato per la moltiplicazione, vale anche per la divisione.

Da questa 2.ª proposizione ne segue

1.° Che si possono moltiplicare ambi i membri di una disuguaglianza per una quantità negativa, purchè si inverta il segno della disuguaglianza; perchè la differenza positiva P—Q moltiplicata per una quantità negativa darà un prodotto negativo, e perciò l' esempio precedente diverrà

$$P.(-m)-Q(-m)<0\ ,$$

ossia

$$-Pm<-Qm\ :$$

2.° Che si possono cangiare i segni a tutti termini della disuguaglianza, purchè si cangi il segno $\gtrless$ in $\lessgtr$: in fatti il mutare i segni a tutti i termini equivale a moltiplicare ambi i membri per —1.

3.° Che se una disuguaglianza ha termini frazionari, ambi i membri di questa si possono ridurre al medesimo divisore, il quale si può sopprimere, purchè sia positivo: nel caso che sia negativo, si può pure levarlo, purchè si cangi il senso della disuguaglianza. Gli scolari non troveranno difficoltà nell' intendere le seguenti trasformazioni

1.ª $8x+2>5x+14$, ossia $x>4$;

2.ª $ay+b>cy+d$, » $x>\dfrac{d-b}{a-c}$;

3.ª $my-ny+q>my-n$, » $ny-my-q<n-my$;

4.ª $\dfrac{3x}{2}+3>\dfrac{4x}{3}+2$, » $9x+18>8x+12$.

168. Proposizione 3.ª *Si possono innalzare a quadrato i due membri di una disuguaglianza, purchè entrambi siano positivi.*

Così, essendo

$$2<4,$$

si ha evidentemente l' altra disuguaglianza dello stesso segno

$$4<16.$$

Quando i due membri fossero di segno contrario, fattone il quadrato, la disuguaglianza potrebbe non più esistere nello stesso senso.

Così facendo il quadrato delle due disuguaglianze

$$5>-3, \quad 3>-5,$$

si ottengono le altre due

$$25>9, \quad 9<25,$$

la prima delle quali ha conservato il medesimo senso, e la seconda l' ha cambiato.

Se entrambi i membri fossero negativi, si possono rendere positivi cambiando il senso della disuguaglianza, e poscia innalzare a quadrato ambi i membri.

Il quadrato della disuguaglianza

$$-3>-4$$

sarà

$$9<16.$$

In generale si possono i due membri di una disuguaglianza innalzare ad una medesima potenza, purchè con questa operazione non vengano mutati i segni dei due membri di essa.

169. Proposizione 4.ª *Si può estrarre la radice quadrata dai due membri di una disuguaglianza fra due quantità positive, purchè si prendano le radici positive.*

Estraendo le radici seconde dalle disuguaglianze

$$16>9, \qquad a^2>b^2$$

si avranno le altre dello stesso senso

$$4>3, \qquad a>b.$$

Se poi si volessero prendere le radici negative si dovrebbero scrivere

$$-4<-3, \quad -a<-b.$$

Anche qui si conclude che si può estrarre una medesima radice da due membri di una disuguaglianza, purchè con questa operazione non vengano mutati i segni dei due membri della medesima.

170. Proposizione 5.ª *Si possono sommare membro a membro due disuguaglianze del medesimo senso.*

Infatti se si hanno le due disuguaglianze del medesimo senso

$$P>Q,$$
$$P'>Q',$$

ciascuna delle differenze $P-Q$, $P'-Q'$ è positiva, e perciò sarà pure positiva la loro somma, e sarà

$$P-Q+P'-Q'>0,$$

ossia

$$P+P'>Q+Q',$$

171. Proposizione 6.ª *Non si possono sottrarre membro a membro due disuguaglianze se non di senso contrario, ed in questo caso la nuova disuguaglianza ha il medesimo senso della prima.*

Abbiansi le due disuguaglianze

$$P>Q,$$
$$P'<Q';$$

la differenza $P-Q$ sarà positiva, e l' altra $P'-Q'$ sarà negativa, e perciò si avrà

$$P-Q-(P'-Q')>0,$$

ossia

$$P-P'>Q-Q',$$

la quale è la differenza fra le due date disuguaglianze, ed ha lo stesso senso della prima.

Se poi le due disuguaglianze avessero lo stesso senso ossia si avesse

$$P>Q,$$
$$P'>Q',$$

fatta la sottrazione, non si può conoscere il senso della nuova disuguaglianza, poichè non si sa quale delle due differenze

$$P-P',\ Q-Q'$$

sia la più grande.

172. Proposizione 7.ª *Si possono moltiplicare membro a membro due disuguaglianze del medesimo senso, purchè i loro membri siano positivi.*

Siano date le due disuguaglianze

$$P>Q,$$
$$P'>Q',$$

nelle quali P, Q, P', Q' sono quantità positive: dimostro che si ha $P.P' > Q.Q'$.

Infatti moltiplico i due membri della prima per la quantità positiva P', ed i due membri della seconda per l' altra quantità positiva Q: si avranno le due disuguaglianze

$$P.P' > P'.Q,$$
$$P'.Q > Q.Q',$$

le quali sommate danno

$$P.P' + P'.Q > P'.Q + Q.Q',$$

ossia

$$P.P' > Q.Q'.$$

Questo teorema non ha più luogo, se i membri delle disuguaglianze non sono tutti positivi.

173. Proposizione 8.ª *Si possono dividere membro a membro due disuguaglianze di senso contrario i cui membri siano positivi, e la nuova disuguaglianza avrà lo stesso senso che aveva il dividendo.*

Siano date le due disuguaglianze

$$P > Q,$$
$$P' < Q':$$

moltiplico membro a membro queste disuguaglianze dopo avere scritto la seconda sotto la forma $Q' > P'$: si avrà il prodotto

$$P.Q' > Q.P',$$

dividendo ambi i membri di questa disuguaglianza pel prodotto positivo $P'Q'$, si ha

$$\frac{P}{P'} > \frac{Q}{Q'},$$

la quale contiene l' enunciato della proposizione.

Se le disuguaglianze sono del medesimo senso, fatta la divisione, non si conosce il senso della nuova disuguaglianza.

§. 2. Risoluzione delle disuguaglianze di primo grado a una incognita.

174. Una disuguaglianza ad una incognita x è di primo grado, quando si può mettere sotto la forma

$$ax+b>0, \text{ ovvero } ax+b<0,$$

nelle quali a e b rappresentano numeri dati.

Si dice *risolta* una disuguaglianza quando l' incognita è sola, positiva, col coefficiente 1 e coll' esponente 1 in un membro, e tutte le altre quantità sono nell' altro membro.

Le precedenti proposizioni ci indicheranno facilmente le operazioni che si dovranno fare per *risolvere* una disuguaglianza.

Se la disuguaglianza ha soltanto termini interi, si trasporteranno i termini contenenti l' incognita nel primo membro e i termini noti nel secondo coll' avvertenza di cambiare i segni ai termini trasportati: poscia si riducono tutti i termini contenenti l' incognita sotto la forma di un solo: e finalmente si libera l' incognita dal suo coefficiente col trasportarlo divisore dell' altro membro, ricordando però di cambiare il senso della disuguaglianza, quando il coefficiente che è passato divisore nell' altro membro, è negativo.

Abbiasi da risolvere la disuguaglianza di primo grado

$$ax+b>cx+d:$$

si avranno le successive trasformazioni

$$ax-cx>d-b\,,$$

$$(a-c)x>d-b\,,$$

$$x>\frac{d-b}{a-c}.$$

Sia da risolvere l' altra disuguaglianza

$$2x+7>5x+3\,;$$

si avrà
$$x<\frac{4}{3}.$$

Questo risultato indica che l' incognita x può avere qualsiasi valore, purchè questo sia minore di $\frac{4}{3}$, il quale si dice il suo *limite* superiore.

175. Se la disuguaglianza avrà termini frazionari, si dovranno ridurre tutti al medesimo denominatore, che verrà soppresso colla solita avvertenza al segno: poscia si faranno le operazioni indicate al n.° precedente.

Vogliasi risolvere la disuguaglianza

$$3x-\frac{2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}>4+2x\,.$$

Riduco tutti i termini al medesimo comun divisore 6, e si avrà

$$\frac{18x}{6}-\frac{4}{6}+\frac{3x}{6}+\frac{2x}{6}>\frac{24}{6}+\frac{12x}{6}.$$

ossia

$$18x-4+3x+2x>24+12x\,,$$

dalla quale si ha

$$x>\frac{28}{11}.$$

Dunque nella data disuguaglianza la x può avere per valore tutti i numeri maggiori di $\frac{28}{11}$, che si chiama il suo *limite* inferiore.

Esempi

Risolvere le seguenti disuguaglianze

1.ª $a+c>ax+cx$,

2.ª $(a+x)(a-x)+x>c^2-x^2+4x$,

3.ª $\frac{x-1}{x+1}<\frac{4}{5}$,

4.ª $\frac{x}{a}+\frac{a}{c}+c<\frac{c}{a}+x+a$,

5.ª $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\frac{1}{16}-10>0$.

§. 3. Risoluzione delle disuguaglianze di secondo grado a una incognita.

176. Una disuguaglianza è di secondo grado quando si può mettere sotto la forma

$$x^2+px+q>0\text{, ovvero } x^2+px+q<0\text{,}$$

dove x è l' incognita, p e q sono due quantità note qualunque positive o negative.

Per trovare i valori di x che rendono il trinomio x^2+px+q positivo o negativo, lo supporremo eguale allo zero, e trovate le due radici dell' equazione $x^2+px+q=0$ discuteremo distintamente i tre casi:

1.° quando le radici sono reali e disuguali;
2.° quando le radici sono reali ed uguali;
3.° quando le radici sono imaginarie.

1.° *L' equazione* $x^2+px+q=0$ *abbia le due radici reali e disuguali.*

Chiamando $x_{,}$ e $x_{,,}$ queste due radici, si avrà (n.° 154)

$$(1) \quad x^2+px+q=(x-x_{,})(x-x_{,,}).$$

Affinchè il trinomio x^2+px+q sia zero, si dovrà dare alla x un valore che sia una delle due radici: perchè sia positivo, è necessario che i due fattori del secondo membro della (1) abbiano il medesimo segno, ossia che si dia alla x un valore o maggiore della maggiore radice, o minore della minore.

Se vogliamo che il trinomio x^2+px+q sia negativo, i due fattori del secondo membro della (1) dovranno avere segno contrario, e perciò bisognerà dare alla x un valore che sia compreso fra le due radici.

Esempio 1.° Quali valori si dovranno dare all' incognita x nel trinomio $x^2-9x+18$, affinchè questo sia positivo?

Fatto $x^2-9x+18=0$, si hanno le due radici

$$x_{,}=3,$$
$$x_{,,}=6:$$

Dunque tutti i valori minori di 3, e maggiori di 6 sostituiti alla x renderanno il trinomio $x^2-9x+18$ positivo.

Esempio 2.° Da quali valori della x verrà soddisfatta la disuguaglianza

$$x^2+8x-20<0.$$

Fatto $x^2+8x-20=0$, si hanno le due radici

$$x_{,}=-10,$$
$$x_{,,}=2;$$

quindi affinchè il dato trinomio sia negativo sarà necessario dare alla x un valore compreso fra i limiti -10 e 2.

2.° *L' equazione* $x^2+px+q=0$ *abbia le due radici eguali:*

Chiamate queste $x_{,}$, $x_{,}$ si avrà (n.° 154).

$$(2) \qquad x^2+px+q=(x-x_{,})^2 .$$

Perchè il trinomio sia eguale a zero si dovrà fare $x=x_{,}$: se poi daremo alla x un valore qualsiasi diverso da $x_{,}$, il secondo membro della (2) essendo un quadrato perfetto sarà sempre positivo, e perciò la disuguaglianza

$$x^2+px+q>0$$

è sempre soddisfatta, purchè sia x differente da $x_{,}$, e l' altra

$$x^2+px+q<0$$

è impossibile.

Esempio. Da quali valori verrà soddisfatta la disuguaglianza

$$x^2-6x+9<0 .$$

Posto $x^2-6x+9=0$, si ha

$$x_{,}=3 ,$$
$$x_{,,}=3 ;$$

le due radici essendo eguali, il trinomio x^2-6x+9 sarà sempre positivo per qualsiasi valore della x diverso da 3, e la proposta disuguaglianza $x^2-6x+9<0$ non può venire soddisfatta da alcuno valore della x.

3.° *L' equazione* $x^2+px+q=0$ *abbia le radici imaginarie.*

In questo caso (n.° 155) sarà

$$\frac{p^2}{4}-q<0 ,$$

ossia moltiplicando per -1,

$$q-\frac{p^2}{4}>0 .$$

Al trinomio dato aggiungendo e togliendo contemporaneamente il termine $\frac{p^2}{4}$ avremo l' eguaglianza

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4},$$

ovvero

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

L' espressione $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ è sempre positiva, perchè è un quadrato perfetto, l' altra $q-\frac{p^2}{4}$ è pure positiva perchè le radici sono imaginarie; dunque il trinomio x^2+px+q essendo la somma di due parti positive non può nè annullarsi, nè divenire negativo.

La disuguaglianza

$$x^2+px+q>0$$

è perciò sempre soddisfatta, e l' altra

$$x^2+px+q<0$$

è impossibile.

Esempio. Da quali valori verrà soddisfatta la disuguaglianza

$$x^2-2x+6>0.$$

Sarà sempre positivo il trinomio x^2-2x+6, perchè la equazione $x^2-2x+6=0$ ha le radici imaginarie.

177. *Applicazioni.*

1.ª Abbiasi la funzione $f(x)=\sqrt{x^2-11x+10}$: si domanda fra quali limiti si possa far variare il valore di x, affinchè la funzione $f(x)$ sia imaginaria. È chiaro che dovrà essere $x^2-11x+10<0$: ma

poichè le radici della

$$x^2-11x+10=0$$

sono

$$x_{,}=1\ ,$$
$$x_{,,}=10\ ,$$

così il trinomio $x^2-11x+10$ sarà negativo se daremo alla x valori compresi fra i limiti 1 e 10.

2.ª Dato un rettangolo di area a^2, e dato il suo perimetro $2p$, sarà facile trovare i suoi lati x e y mediante le due equazioni

$$(1)\ \begin{cases} xy=a^2\ , \\ 2x+2y=2p\ . \end{cases}$$

Ora è evidente che il problema non sarà sempre possibile, poichè per la forma stessa del rettangolo vi deve essere una relazione fra la sua area ed il suo perimetro.

Pertanto vediamo qui il modo di determinare le condizioni di possibilità di questo problema.

Scritte le due equazioni (1) sotto la forma

$$xy=a^2\ ,$$
$$x+y=p\ ,$$

facciamo un' equazione che abbia per incognita z, e per radici x e y; si avrà

$$z^2-pz+a^2=0\ ,$$

dalla quale

$$z=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-a^2}\ ,$$

ossia

$$z_{,}=x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-a^2}\ ,$$

$$z_{,,}=y=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-a^2}\ ;$$

i lati x e y debbono essere reali, dunque si dovrà avere

$$\frac{p^2}{4}-a^2>0,$$

od anche

$$\frac{p^2}{4}-a^2=0,$$

le quali si cambiano nelle due

$$2p>4a,$$
$$2p=4a:$$

queste relazioni ci fanno vedere che nei rettangoli il perimetro non può mai essere minore del quadruplo della radice del numero esprimente l' area.

Premessa questa condizione, sarà possibile il seguente problema: *determinare i lati di un rettangolo la cui area è* 400 *metri quadrati, ed il perimetro eguaglia* 70 *metri?*

3.ª Nella funzione

$$F(y)=\sqrt{4-y}$$

fra quali limiti si potrà far variare il valore della y affinchè il radicale non diventi imaginario?

Esempi

Da quali valori dell' incognita sarà soddisfatta ciascuna delle seguenti disuguaglianze: oppure quali fra queste sono assurde:

1.ª $12x^2-7x+1<0,$
2.ª $x^2-3x+2>0,$
3.ª $x^2-2x+1<0.$

CAPITOLO VIII.

PROBLEMI DI MASSIMI E MINIMI

---

178. Se all' incognita x della funzione $f(x)$ diamo valori differenti, la funzione assumerà pure in generale valori differenti che varieranno col variare della medesima incognita: e se il valore di questa, sia crescendo, sia diminuendo, varierà in modo continuo, il valore della funzione varierà pure in modo continuo.

Quando il valore delle funzione $f(x)$ può crescere in modo continuo fino ad un limite finito oltre il quale decresce, questo si chiama un valore *massimo* della funzione, o semplicemente un *massimo*; quando poi il valore della $f(x)$ è suscettibile di decrescere in modo continuo sino ad un limite finito oltre il quale cresce, questo dicesi un valore *minimo* della funzione, o solamente un minimo.

Se i limiti sono infiniti, la qualcosa significa che il valore della funzione può variare da $+\infty$ a $-\infty$, allora dicesi che la funzione non ha limiti, oppure che non ha nè *massimi* nè *minimi*.

Spesse volte nella risoluzione di problemi avviene che si debbano conoscere i limiti entro i quali può variare un' incognita, come abbiamo visto in alcuni esempi del Capitolo precedente. Ne aggiungeremo in questo alcuni altri che contengono questioni di massimi e minimi determinabili con equazioni di secondo grado.

179. *Problema 1.° Trovare il valore della x che renda massima la funzione $f(x)=5-x^2$.*

Fatto $5-x^2=z$, si ha $x^2=5-z$, dalla quale

$$x=\pm\sqrt{5-z}.$$

Perchè x sia reale è necessario che sia z minore di 5 o tutto al più eguale a 5: dunque la funzione data ha il valore massimo quando è uguale a 5; ma quando si ha $z=5$, si ricava $x=0$; perciò il valore della x che rende massima la data funzione è $x=0$.

180. *Problema 2.° Trovare il minimo valore della* $F(x)=1-2x+x^2$.

Posto $1-2x+x^2=y$, si ha $x^2-2x+1-y=0$, da cui

$$x=1\pm\sqrt{1-1+y}=1\pm\sqrt{y};$$

perchè x sia reale, bisogna che sia y maggiore di zero, o tutto al più eguale allo zero; ma siccome vogliamo che la funzione y sia minima, così dovremo prendere $y=0$, in questo caso si ha $x=1$. Dunque il valore della data funzione $F(x)$ diventa un *minimo*, se invece della x vi sostituiremo *uno*.

181. *Problema 3.° Determinare i limiti dei valori che può prendere la funzione*

$$\phi(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Si faccia

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}=y, \text{ e si avrà}$$

$$x^2+(1-y)x+1-y=0,$$

da cui

$$x=\frac{y-1\pm\sqrt{y^2+2y-3}}{2}:$$

Perchè x sia reale, è necessario che il trinomio y^2+2y-3 sia positivo, oppure eguale allo zero: fatto

$$y^2+2y-3=0,$$

si trovano

$$y_{\prime}=1,$$
$$y_{\prime\prime}=-3.$$

Dunque x sarà reale per qualsiasi valore della y non compreso fra le radici 1 e -3, ed y ossia la funzione data ϕ (x) può variare da 1 sino a $+\infty$, e da -3 fino a $-\infty$. Da ciò si conclude che 1 è il *minimo* dei valori positivi che può assumere la funzione data, e -3 è il *massimo* dei valori negativo. Fatto $y=1$, si trova $x=0$: perciò alla $x=0$ vi corrisponde il valore minimo positivo della funzione; posto invece $y=-3$, si ricava $x=-2$: dunque alla $x=-2$ vi corrisponde il valore massimo negativo della funzione proposta.

182. *Problema 4.° Dividere un numero qualunque n in due parti tali che il loro prodotto sia massimo.*

Chiamata x una delle parti, l' altra sarà $n-x$: e detto p il loro prodotto avremo l' equazione

$$x(n-x)=p:$$

da questa si ottiene risolvendola

$$x=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}-p}\,.$$

Perchè x sia reale è necessario che sia

$$p<\frac{n^2}{4}\,,$$

o tutto al più $$p=\frac{n^2}{4}\,.$$

Poichè p deve essere massimo, delle due condizioni si dovrà prendere l' ultima: in questo caso il radicale sparisce, e vi rimane

$$x=\frac{n}{2}\,.$$

Dunque per avere il prodotto massimo bisogna che il numero sia diviso in due parti eguali.

Fatto $n=10$, avremo i seguenti prodotti
$9.1=9$, $8.2=16$, $7.3=21$, $6.4=24$, $5.5=25$.

Arriviamo alla medesima conclusione per un' altra strada.

Detto egualmente n il numero, p il prodotto si chiami y la differenza delle due parti.

Evidentemente la parte maggiore sarà $\frac{n+y}{2}$ e la parte minore verrà espressa dalla $\frac{n-y}{2}$: perciò si

avrà la relazione

$$p=\frac{n+y}{2}\cdot\frac{n-y}{2},$$

dalla quale si ricava

$$p=\frac{n^2-y^2}{4}=\frac{n^2}{4}-\frac{y^2}{4}.$$

In questa equazione $\frac{n^2}{4}$ è sempre positivo, e l' espressione $-\frac{y^2}{4}$ è sempre negativa qualunque sia la y: perciò p avrà un valore massimo quando y sarà *zero*, ossia quando le due parti saranno eguali.

Mettiamo qui un' altra soluzione del medesimo problema.

Si chiami n il numero, p il prodotto delle due parti, le quali siano x, y.

Avremo le due equazioni

$$x+y=n,$$
$$x.y=p.$$

Facciamo ora un' equazione colla incognita z che abbia per radici x e y; questa sarà

$$z^2-nz+p=0$$

dalla quale risolta si ottiene

$$z=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}-p}.$$

Da questa si ricava facilmente la medesima soluzione dello stesso problema.

183. Dalla soluzione del problema precedente si deduce la dimostrazione del seguente

Teorema. Il prodotto di più numeri positivi, la somma dei quali è uguale a un numero dato, è massimo quando sono tutti eguali fra loro.

Siano $a, b, c, d, \ldots$ le parti del numero dato, le quali moltiplicate fra loro formano il prodotto massimo: questo sarà perciò $a.b.c.d. \ldots$

Dimostro che questi fattori $a, b, c, d, \ldots$ non possono essere disuguali.

Infatti, se due fattori, per esempio, i due primi a, b fossero disuguali, a ciascuno di questi si potrebbe sostituire $\frac{a+b}{2}$, senza cangiare il valore della somma delle parti, e con questa sostituzione si aumenterebbe il loro prodotto, poichè per la soluzione del problema precedente si ha

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} > ab.$$

Dunque si avrebbe

$$a.b.c.d. \ldots < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot c.d. \ldots$$

e perciò $a.b.c.d. \ldots$ non sarebbe il prodotto massimo se i fattori fossero disuguali. Giova qui osservare che se i fattori non fossero positivi, il prodotto non sareb-

be *massimo*, perchè mentre la somma dei fattori rimane sempre la stessa, il loro valore assoluto potrebbe aumentare indefinitamente.

184. *Problema* 5.° *In un circolo di raggio* r *inscrivere un rettangolo di area massima.*

Siano x ed y le dimensioni del rettangolo, a^2 la sua area: avremo le due equazioni

$$xy=a^2,$$
$$x^2+y^2=(2r)^2;$$

ossia le altre due

$$x^2y^2=a^4,$$
$$x^2+y^2=4r^2.$$

Fatta un' equazione coll' incognita z, e colle radici x^2 e y^2, si avrà

$$z^2-4r^2z+a^4=0,$$

dalla quale risulta

$$z_{\prime}=x^2=2r^2+\sqrt{4r^4-a^4},$$
$$z_{\prime\prime}=y^2=2r^2-\sqrt{4r^4-a^4}.$$

Affinchè i valori di z siano reali, sarà necessario che sia

$$4r^4-a^4>0,$$

ovvero anche

$$4r^4-a^4=0:$$

queste condizioni si trasformano nelle due

$$a^4<4r^4,$$
$$a^4=4r^4:$$

volendo l' area massima del rettangolo, prenderemo quest' ultima condizione la quale ci fa sparire il radicale, ed avremo i due valori eguali

$$z_{,}=x^2=2r^2\,,$$
$$z_{,,}=y^2=2r^2\,,$$

ossia

$$x=y=r\sqrt{2}\,,$$

la quale è l' espressione del lato del quadrato inscritto nel circolo di raggio r.

Dunque il massimo rettangolo inscritto in un circolo è il quadrato inscritto.

Esempi

1.° Dimostrare che il rettangolo di perimetro *massimo* inscrittibile in un circolo è un quadrato.

2.° Scomporre il numero n in due parti tali che la somma dei loro prodotti sia un *minimo*.

3.° Trovare il valore massimo della funzione

$$f(x)=\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}\,.$$

CAPITOLO IX.

MASSIMO COMUN DIVISORE DEI POLINOMI

185. Parleremo in questo Capitolo soltanto dei polinomi razionali e interi, ossia di quelli che non contengono nè quantità irrazionali nè denominatori, e diremo che un polinomio è divisibile per un altro polinomio, quando, oltre ad essere nullo il resto, anche il quoziente è un polinomio intero.

Chiameremo *primo* quel polinomio che non è divisibile per alcun numero intero, nè per alcuna espressione algebrica intera e razionale, fuorchè per se stesso e per l' unità. Così $x-\alpha$ è un binomio *primo*, $y^2-\beta$ è pure un binomio *primo*, perchè, quantunque sia divisibile per $y+\sqrt{\beta}$, ovvero per $y-\sqrt{\beta}$, questi sono fattori *irrazionali*: invece z^2-a^2 non è un binomio *primo*, come pure non è *primo* il trinomio $x^2+2ax+a^2$.

186. Ammettiamo che ogni polinomio intero e *primo* P, che divide esattamente il prodotto $P'.P''$ di due polinomi interi, deve dividere l' uno o l' altro (*). Da questa proposizione ne segue che un polinomio intero non può essere ridotto in fattori *primi* altro che in un sol modo, ossia che esiste un solo sistema di fattori primi il cui prodotto sia eguale ad un dato polinomio intero.

(*) Chi desidera vederne la dimostrazione può trovarla nella traduzione italiana del trattato d' algebra elementare del Bertrand fatta dal prof. Betti.

Infatti sia $P.P'.P''.P'''$...... un prodotto di fattori *primi*, il quale sia eguale ad un altro prodotto di fattori primi $p.p'.p''.p'''$.......

Avremo l' eguaglianza

$$P.P'.P''.P'''......=p.p'.p''.p'''......$$

Il fattore p dividendo il secondo membro dovrà pure dividerne il primo membro: ora se p fosse differente dai fattori primi P, P', P'', P''', ... non potrebbe dividere alcuno, e perciò non potrebbe dividere il loro prodotto. Dunque è necessario che il fattore p sia eguale a qualcuno dei fattori del primo membro. Supponiamo $P=p$, dividendo ambi i membri delle date equazioni per uno di questi due fattori eguali si ha l' altra eguaglianza

$$P'.P''.P'''......=p'.p''.p'''......,$$

sulla quale ripetendo il medesimo ragionamento si concluderà che p' deve essere eguale a qualcuno dei fattori dell' altro membro.

Così seguitando si dimostrerebbe che i fattori dei due membri della proposta eguaglianza sono rispettivamente eguali.

187. Dicesi *massimo comun divisore* di due o più polinomi il prodotto di tutti i loro fattori *primi comuni*, siano questi numerici, monomi o polinomi. La ricerca del massimo comun divisore delle quantità monomie non presenta alcuna difficoltà, purchè si considerino le lettere come fattori primi, e si applichi la regola dell' aritmetica. Così il massimo comun divisore dei monomi $3a^2cx$, $9a^3c^2x$, $27a^2c^3x^2$ sarà $3a^2cx$: egualmente si troverà il massimo comun divisore nei monomi

$$15.a^4x^2y^3,\ 12.a^3xy^2,\ 21.a^2x^2y^2,\ 24.a^3x^5y^4,$$

purchè si abbia l' avvertenza di prendere i fattori *primi* numerici comuni ai coefficienti, e le lettere comuni inalzate all' esponente minore che hanno nei monomi.

188. Vediamo ora come si possa trovare il massimo comun divisore di due o più polinomi. Avremo una regola per questa ricerca dalla seguente

Proposizione. *Se* Q *è il quoziente intero, ed* R *il resto della divisione del polinomio intero* P *per un altro pure intero* P', *il massimo comun divisore* M *di* P *e* P' *è lo stesso che quello di* P' *ed* R.

Infatti avremo (n.° 45).

$$(1) \qquad P=P'.Q+R:$$

ma P e P' sono divisibili per M, dunque anche il prodotto P'.Q sarà divisibile per M, e perciò anche R. Divisa ciascuna delle espressioni P, P' ed R della equazione (1) pel divisore M, siano rispettivamente p, p', r i relativi quozienti, si avrà l' altra equazione

$$(2) \qquad p=p'.Q+r.$$

In questa equazione le quantità p' ed r sono *prime* fra di loro, perchè se avessero un fattor comune, questo dividendo il secondo membro dividerebbe anche il primo, e perciò p e p' avrebbero ancora un fattore comune, ed M non sarebbe il massimo, la qual cosa sarebbe contro l' ipotesi.

Dunque M è massimo comun divisore di P,P' ed R.

189. Dalla precedente proposizione si deduce, come in aritmetica, che per trovare il massimo comun divisore

di due polinomi interi, si debbono questi ordinare per rispetto ad una medesima lettera, e poscia si divide il polinomio di grado maggiore, per rispetto a tale lettera, per l' altro: quando ambidue fossero dello stesso grado, ciascuno dei due potrebbe prendersi come dividendo.

Se, fatta la divisione, non v' è residuo, il polinomio divisore è il massimo comun divisore dimandato: se invece si ottiene un resto che sarà di grado inferiore al divisore, si dividerà questo pel resto, e si continuerà nello stesso modo, fino a che si arrivi ad un resto che divide esattamente il resto precedente: l' ultimo resto che è stato anche ultimo divisore sarà il massimo comun divisore dimandato.

Qualche volta però può avvenire che in queste successive divisioni non si arrivi ad un resto nullo: in tal caso i due polinomi non hanno comun divisore.

190. Poichè nell' eseguire queste divisioni per la ricerca del massimo comun divisore di polinomi, si incontrano qualche volta alcuni ostacoli, così questi si potranno evitare coll' applicazione dei due seguenti principî:

1.° *Il massimo comun divisore di due polinomi interi non viene alterato col moltiplicare o col dividere uno di questi per una quantità intera qualunque, purchè questa non abbia alcun fattore comune coll' altro polinomio.*

Infatti col moltiplicare uno dei due polinomi per la detta quantità non s' introduce alcun nuovo fattore comune, e col dividere uno dei polinomi per l' anzidetta quantità non si distrugge alcuno dei fattori comuni.

2.° *Si possono sopprimere nel dividendo e nel divisore fattori comuni, purchè si moltiplichi il risultato finale per questi fattori.*

Invero il massimo comun divisore di due polinomi non viene così alterato, poichè rimane egualmente il prodotto di tutti i fattori comuni.

191. Mettiamo qui alcuni esempi sulla ricerca del massimo comun divisore fra due polinomi interi.

Esempio 1.° Trovare il massimo comun divisore tra i due polinomi

$$P = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4\,,$$
$$P' = \qquad x^3 + 5x^2 + 7x + 2\,.$$

Divido il primo termine del primo polinomio pel primo termine del secondo polinomio, trovo per primo termine del quoziente x, e per resto

$$-2x^3 - 3x^2 + 4x + 4\,.$$

Divido ancora il primo termine di questo residuo pel primo termine del polinomio divisore P′: ho -2 nel quoziente, e nel residuo trovo $7x^2 + 18x + 8$.

Essendo questo resto di grado inferiore al divisore, divideremo questo pel resto. Per potere eseguire questa divisione moltiplico il nuovo dividendo per 7, il quale diventa

$$7x^3 + 35.x^2 + 49x + 14\,.$$

Diviso il primo termine di questo pel primo termine del nuovo divisore si trova x per primo termine nel quoto, e si ha per residuo

$$17x^2 + 41x + 14\,;$$

per poter proseguire la divisione moltiplichiamo questo residuo per 7: si avrà

$$119x^2+287x+98\,,$$

e diviso il primo termine di questo pel primo termine del divisore si ottiene 17 nel quoziente, e nel residuo si ha

$$-19x-38\,.$$

Essendo questo residuo di grado inferiore al divisore $7x^2+18x+8$, consideriamo questo come dividendo e dividiamolo pel residuo $-19x-38$. Prima però di incominciare la divisione, rendiamo più semplice questo nuovo divisore col dividerlo per -19 che è fattore comune a tutti i suoi termini, e non è fattore del dividendo.

Fatta questa riduzione il divisore diventerà

$$x+2\,,$$

il quale dividerà esattamente l' ultimo dividendo, e perciò quest' ultimo divisore

$x+2$ sarà il massimo comune divisore fra i due dati polinomi P e P'.

Per verificare se il binomio $x+2$ è il massimo comune divisore dimandato, si può dividere ciascuno dei due polinomi dati P e P' per questo binomio: se le divisioni sono esatte, il binomio $x+2$ sarà *comune* divisore, e se i quozienti che ne risultano non hanno alcun divisore comune, il binomio $x+2$ sarà *massimo comune* divisore.

Ecco il quadro di queste diverse operazioni:

1.ª *Divisione*

$$\begin{array}{lr|c}
 & x^4+3x^3+4x^2+6x+4 & x^3+5x^2+7x+2 \\
 & -x^4-5x^3-7x^2-2x & \\
\hline
1.^{\circ}\text{ resto} & -2x^3-3x^2+4x+4 & x-2 \\
 & +2x^3+10x^2+14x+4 & \\
2.^{\circ}\text{ resto} & 7x^2+18x+8 &
\end{array}$$

2.ª *Divisione*

$$\begin{array}{lr|c}
 & x^3+5x^2+7x+2 & 7x^2+18x+8 \\
\text{ossia} & 7x^3+35x^2+49x+14 & \\
 & -7x^3-18x^2-8x & \\
\hline
1.^{\circ}\text{ resto} & 17x^2+41x+14 & x+17 \\
\text{ossia} & 119x^2+287x+98 & \\
 & -119x^2-306x-136 & \\
\hline
2.^{\circ}\text{ resto} & -19x-38 &
\end{array}$$

3.ª *Divisione*

$$\begin{array}{lr|c}
 & 7x^2+18x+8 & -19x-38 \\
 & -7x^2-14x & \text{ossia}\quad x+2 \\
\hline
1.^{\circ}\text{ resto} & 4x+8 & \\
 & -4x-8 & \\
\hline
2.^{\circ}\text{ resto} & 0\quad 0\ . &
\end{array}$$

Esempio 2.° Trovare il massimo comune divisore fra i due polinomi

$$p=x^4+2x^3+2x^2+x\,,$$
$$p'=x^3+3x^2+2x\,.$$

Questi due polinomi hanno un fattor comune monomio x che sopprimo, coll' avvertenza che per questo monomio dovrò poscia moltiplicare il risultato finale, ossia l' ultimo divisore.

Quindi i due polinomi diventano

$$x^3+2x^2+2x+1\,,$$
$$x^2+3x+2\,.$$

Divido il primo termine del primo polinomio pel primo termine del secondo: ho x nel quoziente, ed ottengo per primo residuo

$$-x^2+1:$$

proseguo la divisione, e risulta per secondo termine nel quoziente -1, e per secondo residuo

$$3x+3\,.$$

Prendo questo per *divisore* dell' altro che considero *dividendo;* ma prima di eseguire questa divisione, libero questo nuovo divisore dal suo fattore 3, il quale non è comune col dividendo. Fatta questa riduzione, ed eseguita la divisione, questa risulta esatta, e perciò l' ultimo divisore moltiplicato pel primitivo fattore già soppresso sarà il massimo comune divisore, il quale sarà dunque

$$x.(x+1)=x^2+x\,.$$

Ecco il quadro di queste operazioni.

1.ª *Divisione*

	Dividendo	Divisore
	$x^4+2x^3+2x^2+x$	x^3+3x^2+2x
ossia	x^3+2x^2+2x+1	ossia x^2+3x+2
	$-x^3-3x^2-2x$	$x-1$
1.° resto	$-x^2+1$	
	$+x^2+3x+2$	
2.° resto	$3x+3$	

2.ª *Divisione*

	x^2+3x+2		$3x+3$
	$-x^2-x$	ossia	$x+1$
1.° resto	$2x+2$		$x+2$
	$-2x-2$		
2.° resto	$0 \quad 0$		

Esempio 3.° Trovare il massimo comune divisore fra i due polinomi

$$2x\pm x^4+5x^2+4x^3\,,$$
$$3x^3+2x+7x^2\,.$$

192. I due esempi precedenti ci hanno fatto vedere quanto sia utile per l' abbreviazione e semplicità del calcolo il sopprimere ad ogni operazione quei fattori che moltiplicano solamente uno dei due polinomi *dividendo* e *divisore*, oppure ambidue, purchè in quest' ultimo caso si abbia l' avvertenza di moltiplicare pei fattori comuni soppressi l' ultimo divisore. Dagli stessi esempi abbiamo pure visto che per rendere possibili le successive divisioni è necessario qualche volta moltiplicare uno dei due polinomi per una qualche quantità, purchè questa non sia un fattore dell' altro polinomio.

193. Per trovare il massimo comune divisore di più polinomi $P, P', P'', P''', \ldots\ldots$ si cerca quello di due polinomi, per esempio, P e P'. Sia questo M, il quale conterrà tutti i fattori primi comuni a P e a P'. Poscia si cerca il massimo comune divisore dei polinomi M e P'': sia questo $M_{\prime}$, il quale conterrà tutti i fattori primi comuni a P, P' e P''. Così cercheremo il

massimo comune divisore fra $M_{,}$ e P''' e via di seguito: l' ultimo massimo comune divisore trovato sarà quello dei dati polinomi.

Esempio 1.° Trovare il massimo comune divisore fra i tre polinomi.

$$\begin{array}{ll} (P) & 2x^3+x^2+2x+1\,, \\ (P') & 2x^2+5x+2\,, \\ (P'') & 2x^2+7x+3\,. \end{array}$$

Il massimo comune divisore fra (P) e (P') è $2x+1$, il quale è pure massimo comune divisore fra se stesso ed il terzo (P''): dunque $2x+1$ sarà massimo comune divisore dei tre dati polinomi.

Ecco il quadro di tutte le operazioni

1.ª *Divisione*

$$\begin{array}{lr|r} & 2x^3+x^2+2x+1 & 2x^2+5x+2 \\ & -2x^3-5x^2-2x & \\ \hline \text{1.° resto} & -4x^2+1 & x-2 \\ & +4x^2+10x+4 & \\ \hline \text{2.° resto} & 10x+5 & \end{array}$$

2.ª *Divisione*

$$\begin{array}{lr|r} & 2x^2+5x+2 & 10x+5 \\ & -2x^2-x & \text{ossia}\quad 2x+1 \\ \hline \text{1.° resto} & 4x+2 & x+1 \\ \text{ossia} & 2x+1 & \\ & -2x-1 & \\ \hline \text{2.° resto} & 0\quad 0 & \end{array}$$

3.ª *Divisione*

$$
\begin{array}{l r|r}
 & 2x^2+7x+3 & 2x+1 \\
 & -2x^2-x & \\
\hline
\text{1.° resto} & 6x+3 & x+1 \\
\text{ovvero} & 2x+1 & \\
 & -2x+1 & \\
\hline
\text{2.° resto} & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Esempio 2.° Trovare il massimo comune divisore fra i quattro polinomi

$$
\begin{array}{ll}
(a) & x^4+2x^3+2x+4 \\
(b) & 2x^3+5x^2+3x+2 \\
(c) & x^3+2x^2+x+2 \\
(d) & x^2+3x+2
\end{array}
$$

194. Dall' osservazione che la divisione è un caso particolare della sottrazione, si conclude facilmente che per la ricerca del massimo comune divisore dei polinomi si può ricorrere al metodo delle successive sottrazioni (*), il quale nella maggior parte dei casi riesce più facile e più semplice.

Vediamo come si possa applicare questo metodo per la ricerca del massimo comun divisore fra i due polinomi del secondo esempio del n.° **191**.

Questi polinomi erano

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x^3+2x^2+2x+1 \ , \\
(2) & x^2+3x+2 \ ;
\end{array}
$$

(*) Newton adopra nella sua *Aritmetica universale* questo metodo per la ricerca del massimo comune divisore dei polinomi.

moltiplico il secondo per x, col fine di rendere eguali i primi termini, e sottraggo il prodotto dal polinomio (1): ottengo per differenza

$$(3) \qquad -x^2+1 :$$

ora moltiplico questa per -1, e sottraggo il prodotto dal polinomio (2); si ha per resto
$3x+3$. Diviso questo pel fattore 3, rimane (4) $x+1$. Moltiplico questo per $-x$, e sottraggo il prodotto dal binomio (3): si ha per residuo

$$(5) \qquad x+1.$$

Questo sottratto dal penultimo resto (4) dà zero per differenza: dunque l' ultimo resto $x+1$ è il massimo comune divisore dei due polinomi dati, come era anche stato trovato coll' altro metodo della divisione.

Da ciò si vede che questo metodo consiste nel rendere eguali i due primi termini dei polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti di una lettera mediante l' introduzione o soppressione di fattori che non siano comuni ai due polinomi. Poscia sottratto l' uno dall' altro, il resto si confronta col polinomio *sottraendo* per trovarne un secondo resto coll' operare nello stesso modo di prima, e cosi di seguito finchè si arrivi a due resti eguali, i quali sono il massimo comune divisore dei due polinomi.

Esempio

Trovare con questo metodo il massimo comune divisore fra i due polinomi

$$x^4+3x^3+4x^2+6x+4 ,$$
$$x^3+5x^2+7x+2 .$$

CAPITOLO X.

DELLE FRAZIONI CONTINUE

195. Abbiasi la frazione ordinaria $\frac{H}{K}$ dove H e K possono essere razionali o irrazionali. Per avere un valore approssimato di questa frazione, il modo più semplice è d' indicare la parte intera. Detta questa a, che può essere anche zero, e rappresentata con $\frac{1}{y}$ la parte frazionaria sarà

$$\frac{H}{K}=a+\frac{1}{y},$$

essendo $\frac{1}{y}<1$, ovvero $y>1$.

Anche qui per avere un valore approssimato di y, calcoleremo la parte intera che chiameremo b, indicando con $\frac{1}{z}$ la parte frazionaria: avremo così

$$\frac{H}{K}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{z}},$$

essendo $\frac{1}{z}<1$, osssia $z>1$.

Così pure qui faremo $z=c+\frac{1}{u}$, e sarà

$$\frac{H}{K}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{u}}}.$$

E se sarà $u=d+\frac{1}{v}$, avremo ancora

$$\frac{H}{K}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{v}}}},$$

e così potremo continuare indefinitamente, a meno che uno dei numeri $y, z, u, v, \ldots\ldots$ non sia intero.

L' espressione $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{v}}}}$,

dicesi *frazione continua*, i numeri $a, b, c, d, \ldots.$ che sono le parti intere dei denominatori successivi $y, z, u, \ldots$ si chiamano *quozienti incompleti*, e le frazioni $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, ... si chiamano *frazioni integranti*.

Dicesi poi *quoziente completo* qualunque *quoziente completo* accresciuto di tutta la quantità indicata dal segno +

che lo segue. Se la frazione continua è finita, l' ultimo quoziente *incompleto* è intero e diventa *completo*, e di più esso è necessariamente maggiore di un' *unità*: poichè se fosse eguale all' unità esso quoziente sparirebbe, ed il penultimo termine diventerebbe l' ultimo.

196. Sviluppiamo in frazione continua la frazione ordinaria

$$\frac{H}{K}=\frac{63}{37}.$$

Avremo

$$\frac{63}{37}=1+\frac{26}{37}=1+\frac{1}{\frac{37}{26}},$$

ovvero

$$\frac{63}{37}=1+\frac{1}{1+\frac{11}{26}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{26}{11}}},$$

anche

$$\frac{63}{37}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{4}{11}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{11}{4}}}},$$

ancora

$$\frac{63}{37}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{3}{4}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}},$$

e finalmente

$$\frac{63}{37}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}.$$

I termini 1, 1, 2, 2, 1, 3 sono *quozienti incompleti*, e le espressioni $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$ sono le *frazioni integranti*.

197. *Ogni frazione razionale si può sempre ridurre in frazione continua finita.*

Infatti dall' esempio precedente si vede che per ridurre una frazione ordinaria razionale in frazione continua si debbono fare le medesime operazioni che si adoperano per la ricerca del massimo comune divisore fra i due termini di una data frazione: ora il numero delle divisioni per questa ricerca é sempre finito: dunque sarà pure finita la frazione continua ottenuta con queste successive divisioni.

198. *Inversamente, ogni frazione continua finita rappresenta una frazione razionale.*

Abbiasi la frazione continua finita

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta}}},$$

dove α, β, γ, δ sono numeri interi.

Evidentemente si avranno le seguenti trasformazioni:

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\cfrac{\gamma\delta+1}{\delta}}}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{\delta}{\gamma\delta+1}},$$

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\cfrac{\beta\gamma\delta+\beta+\delta}{\gamma\delta+1}}=\alpha+\frac{\gamma\delta+1}{\beta\gamma\delta+\beta+\delta},$$

$$x=\frac{\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta+\alpha\delta+\gamma\delta+1}{\beta\gamma\delta+\beta+\delta},$$

la quale frazione, avendo il numeratore e denominatore composti di termini interi, sarà razionale.

La verità di questa proposizione riesce pure evidente se si considera che per ritornare alla frazione ordinaria primitiva non si ha che da eseguire un limitato numero di addizioni e divisioni di frazioni a termini interi.

199. Nello sviluppo della frazione $\frac{H}{K}$ in frazione continua (n.° 195) le espressioni successive $\frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \ldots$ sono minori dell' unità: se queste vengono trascurate non si avranno che valori approssimati della frazione, i quali valori si chiamano frazioni *ridotte* o *convergenti*.

Così se nella frazione continua generale

$$\frac{H}{K}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{v}}}}$$

prendiamo le diverse espressioni

1.ª a,

2.ª $a+\frac{1}{b}$,

3.ª $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$,

4.ª $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$,

queste saranno le frazioni *ridotte* o *convergenti*.

Egualmente le *ridotte* dell' esempio particolare del n.º 196 saranno

1.ª 1,

2.ª $1+\frac{1}{1}=2$,

3.ª $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$,

4.ª $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{5}}=\frac{12}{7},$$

5.ª $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{10}{7}}=\frac{17}{10},$$

6.ª $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{11}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{11}{26}}$$

$$=1+\frac{26}{37}=\frac{63}{37}.$$

Da questo secondo esempio si conclude che la frazione continua finita ha un numero limitato di *ridotte*, e l' ultima è sempre equivalente alla frazione generatrice corrispondente.

200. Se osserviamo il modo col quale si sono trovate le ridotte dei due esempi precedenti ci accorgiamo subito che queste sono alternativamente minori e maggiori della data frazione. Infatti per fare la prima ridotta prendiamo soltanto la parte intera, e trascuriamo la parte frazionaria, perciò la prima ridotta sarà minore della frazione generatrice: per ottenere la seconda ridotta alla quantità intera a aggiungiamo la prima frazione *integrante* $\frac{1}{b}$, il cui denominatore è più piccolo del vero, perchè vi si trascura tutta la quantità che vi è dopo b: perciò la seconda ridotta sarà maggiore della $\frac{H}{K}$. E così si troverebbe che la terza è minore, la quarta maggiore, e via di seguito.

201. Legge di formazione delle Ridotte.

Il numeratore di ogni ridotta eguaglia il prodotto del numeratore della ridotta precedente pel quoziente incompleto relativo alla ridotta che si vuol formare, più il numeratore della antiprecedente ridotta; egualmente il denominatore di ogni ridotta è uguale al prodotto del denominatore della ridotta precedente pel quoziente incompleto relativo alla ridotta che si vuol formare, più il denominatore della antiprecedente ridotta.

Infatti nella frazione continua

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

le due prime ridotte sono

1.ª $\frac{a}{1}$,

2.ª $a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$,

avvertendo che suolsi porre sotto la forma frazionaria anche la prima, benchè sia una quantità intera, dandole per denominatore l' unità: se la parte intera fosse zero, la prima ridotta si scriverebbe $\frac{0}{1}$.

Per formare la terza ridotta si dovrà prendere nella frazione continua anche l' altra frazione integrante $\frac{1}{c}$, ossia nella seconda ridotta sostituire invece di b la quantità $b+\frac{1}{c}$; si avrà perciò

3.ª $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$.

Ricordando che c è il quoziente *incompleto* relativo alla terza ridotta si vede che il numeratore di questa terza è il prodotto del numeratore della seconda per questo quoziente incompleto, più il numeratore della prima. Egualmente il denominatore della terza si forma coi denominatori delle due prime.

Formando la quarta ridotta si troverebbe una frazione i cui termini sarebbero formati dalle due ridotte precedenti terza e seconda nello stesso modo che i termini della terza si ottengono dalla seconda e prima.

Dunque la terza e la quarta ridotta sono formate secondo la enunciata legge di formazione.

Per dimostrare che questa legge è generale, ammettiamo di averla trovata vera per le prime ridotte sino alle tre ridotte consecutive $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, alle quali corrispondano rispettivamente i tre quozienti incompleti p, q, r: l' ultima delle tre ridotte verrà data dalla espressione

$$(1) \qquad \frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Ora chiamata $\frac{S}{S'}$ la ridotta che succede alla $\frac{R}{R'}$, e detto s il quoziente incompleto che vi corrisponde, dimostreremo che la legge di formazione già trovata si estende anche a questa $\frac{S}{S'}$ e quindi alle successive.

Dal modo col quale abbiamo formato precedentemente le ridotte si vede che per ottenere la ridotta $\frac{S}{S'}$ si deve sostituire nella precedente (1) $\frac{R}{R'}$ invece

di r la quantità $r + \frac{1}{s}$. Fatta questa sostituzione nella (1) avremo

$$(2)\quad \frac{S}{S'} = \frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'} = \frac{Qrs+Q+Ps}{Q'rs+Q'+P's}$$

$$= \frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'} = \frac{Rs+Q}{R's+Q'},$$

dove si legge che la ridotta $\frac{S}{S'}$ si deduce dalle due precedenti colla legge già enunciata.

Concluderemo dunque che ammessa questa legge di formazione per tre ridotte qualunque consecutive, la medesima legge si verifica per la ridotta ad esse successiva: ma questa legge si è verificata per le tre prime, dunque sarà vera per la quarta; ma avendo luogo per la seconda, terza e quarta, si verificherà pure per la quinta e così di seguito per ciascuna delle altre successive.

Dunque la legge di formazione delle ridotte è generale.

202. Dal modo col quale si formano le ridotte si vede che i termini di ciascuna sono maggiori de' termini rispettivi della ridotta precedente.

203. Data la frazione continua finita

$$\frac{H}{K} = 0 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11}}}}$$

trovare le *ridotte*.

Scrivo in linea orizzontale i quozienti incompleti, e sotto di essi scrivo le ridotte corrispondenti che successivamente si formano: avremo

$$\text{Quozienti} \quad 0, \quad 1, \quad 5, \quad 1, \quad 11;$$

$$\text{Ridotte} \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{71}{83}.$$

Essendo l' ultima di queste la frazione generatrice si avrà

$$\frac{H}{K}=\frac{71}{83}.$$

Esempi

1.° Trovare le frazioni *ridotte* della frazione continua

$$\frac{h}{k}=1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}.$$

2.° Trovare la frazione ordinaria equivalente alla frazione continua

$$\frac{h}{k}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}.$$

3.° Sviluppare in frazioni continue le frazioni ordinarie

$$1.^a \quad \frac{101}{87},$$

$$2.^a \quad \frac{87}{101},$$

$$3.^a \quad \frac{151}{131},$$

204. Proprietà delle Ridotte.

1.ª *La differenza fra due ridotte consecutive è uguale ad una frazione che ha per numeratore l' unità e per denominatore il prodotto dei denominatori delle due ridotte.*

Abbiansi le tre ridotte consecutive $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, e sia r il quoziente incompleto relativo a quest' ultima: per la legge di formazione (n.° 201) si avrà

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'},$$

e perciò si otterranno le due differenze

$$(\alpha) \quad \frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{Q'P'},$$

$$(\beta) \quad \frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=$$

$$=\frac{QQ'r+PQ'-QQ'r-P'Q}{Q'(Q'r+P')}=\frac{-(QP'-PQ')}{Q'R'}.$$

Da questi due risultati si vede che due differenze consecutive che si ottengono sottraendo una ridotta dalla seguente, e poi questa da quella che segue, hanno lo stesso numeratore, ma di segno contrario, ossia il numeratore della differenza di due ridotte consecutive ha sempre lo stesso valore assoluto, qualunque sia l' ordine di queste ridotte: e ciascuna differenza ha per denominatore il prodotto dei denominatori delle due ridotte.

Ora considerando le due prime ridotte $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$ nella frazione continua generale

$$\frac{H}{K}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}$$

si scorge che la loro differenza $\frac{1}{b}$ ha per numeratore l' unità.

Dunque il numeratore della differenza fra la seconda e la terza sarà -1, ed in generale il valore costante dei numeratori delle differenze di due ridotte consecutive è ± 1, prendendo il segno $+$ quando si sottrae una ridotta di ordine impari, ed il segno $-$ quando si sottrae una ridotta di ordine pari.

Dovendo essere il numeratore di ciascuna differenza fra due ridotte consecutive eguale a ± 1, le due differenze (α) e (β) diventeranno

$$(\alpha') \quad \frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{\pm 1}{P'Q'},$$

$$(\beta') \quad \frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{\mp 1}{Q'R'},$$

e perciò si avrà $QP'-PQ'=\pm 1$.

205. 2.ª *Una ridotta qualunque è sempre una frazione irreducibile.*

Prendiamo le due ridotte consecutive

$$\frac{P}{P'}, \quad \frac{Q}{Q'}:$$

la loro differenza sarà

$$QP'-PQ'=\pm 1 .$$

Da questa equazione si deduce che non può esistere nessun fattore comune fra i due termini P e P', ovvero fra Q e Q' delle due ridotte, perchè questo fattore dividerebbe i due termini della differenza QP' —PQ' e perciò dovrebbe anche dividere il secondo membro dell' eguaglianza, cioè l' unità, la qual cosa è impossibile.

206. Da questa seconda proposizione ne segue che se si converte in frazione continua una frazione i cui termini abbiano un fattor comune, e si formano le successive ridotte fina all' ultima, non si ottiene più la frazione ordinaria sotto la forma primitiva, ma invece la stessa frazione ridotta ai minimi termini.

207. 3.ª *Il valore della frazione continua è compreso fra i valori di due ridotte consecutive.*

Chiamiamo x il valore della frazione continua

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots\quad+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}}}}$$

e ritenendo le precedenti denominazioni delle ridotte avremo

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Se in questa ridotta invece del quoziente incompleto r mettiamo il quoziente completo $r+\frac{1}{s+\ldots}$ che diremo y, avremo il valore della frazione continua, e perciò si avrà la relazione

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}.$$

Ora troviamo la differenza tra questo valore della frazione continua, ed il valore di ciascuna delle due ridotte consecutive $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$: avremo

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{(QP'-PQ')y}{P'(Q'y+P')},$$

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{-(QP'-PQ')}{Q'(Q'y+P')}:$$

queste differenze per la proposizione prima (n. 204) si cambiano nelle altre

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{\pm y}{P'(Q'y+P')},$$

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{\mp 1}{Q'(Q'y+P')},$$

nelle quali si legge che, essendo y, P', Q' quantità positive, i due risultati sono necessariamente di segno contrario, e perciò se sarà $x>\frac{P}{P'}$, dovrà essere $x<\frac{Q}{Q'}$, ed inversamente se sarà x minore della prima dovrà essere necessariamente maggiore dell'altra ridotta.

208. Se la ridotta $\frac{Q}{Q'}$ è di posto pari e quindi $\frac{P}{P'}$ di posto impari, si ha (n.° 204)

$$QP'-PQ'=1,$$

e perciò

$$x-\frac{P}{P'}>0, \text{ ed } x-\frac{Q}{Q'}<0,$$

ossia

$$x>\frac{P}{P'}, \quad \text{ed} \quad x<\frac{Q}{Q'};$$

dunque le ridotte di posto pari sono maggiori, e quelle di posto impari sono minori del valore della frazione continua.

209. 4.ª *Ogni ridotta ha un valore più prossimo al valore della frazione continua, che la ridotta precedente.*

Infatti precedentemente abbiamo trovato

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{\pm y}{(Q'y+P')P'},$$

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{\mp 1}{(Q'y+P')Q'},$$

essendo $P'<Q'$, ed $y>1$, fatta astrazione dal segno, la seconda differenza sarà minore della prima, e perciò il valore della ridotta $\frac{Q}{Q'}$ è più prossimo al valore della frazione continua che quello della ridotta precedente $\frac{P}{P'}$.

210. *Osservazioni.* Le ridotte di posto pari sono maggiori della frazione continua, e quelle di posto impari sono minori: di più le ridotte successive convergono verso il valore della frazione continua a misura che si allontanano dalla prima; dunque ne segue che le ridotte di posto pari vanno successivamente diminuendo e quelle di posto impari al contrario aumentano nell' allontanarsi dalla prima. Conviene pure notare che nessun numero K può approssimarsi al valore di una frazione continua x di più di una ridotta $\frac{Q}{Q'}$ senza essere compreso tra questa e la ridotta precedente $\frac{P}{P'}$. Infatti il valore della frazione continua x è compreso fra le due ridotte $\frac{P}{P'}$ e $\frac{Q}{Q'}$, ma il nu-

mero K approssimandosi ad x più di $\frac{Q}{Q'}$ ed a più forte ragione anche più di $\frac{P}{P'}$, dovrà essere compreso fra le due ridotte $\frac{P}{P'}$ e $\frac{Q}{Q'}$.

211. 5.ª *Una ridotta qualunque si approssima al valore di una frazione continua più di ogni altra frazione che abbia i termini più semplici.*

Abbiasi la frazione $\frac{A}{B}$, il cui valore si approssimi al valore della frazione continua più della ridotta $\frac{Q}{Q'}$: dimostrerò che dovrà essere $A>Q$, e $B>Q'$.

La frazione $\frac{A}{B}$ per le *osservazioni* del n.° **210** dovrà essere compresa fra $\frac{Q}{Q'}$ e la ridotta precedente $\frac{P}{P'}$, e perciò fatta astrazione dal segno dovrà essere

$$\frac{A}{B}-\frac{P}{P'}<\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}:$$

ma abbiamo

$$(1)\quad \frac{A}{B}-\frac{P}{P'}=\frac{AP'-BP}{BP'},$$

$$(2)\quad \frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{\pm 1}{P'Q'},$$

ed essendo A, B, P, P' numeri interi, il numeratore del secondo membro della penultima equazione non può essere minore dell' unità; di più non può

essere nullo, perchè se fosse $AP'-BP=0$, si avrebbe $\frac{A}{B}=\frac{P}{P'}$, e quindi la frazione data $\frac{A}{B}$ si approssimerebbe alla frazione continua meno della ridotta $\frac{Q}{Q'}$ contro l' ipotesi fatta.

Da ciò ne segue che dovendo essere la differenza (1) minore della (2) dovrà verificarsi la disuguaglianza

$$BP'>P'Q'$$

ossia

$$B>Q'.$$

Nello stesso modo si potrebbe dimostrare che deve essere $A>Q$. Infatti dovendo essere $\frac{A}{B}$ compreso fra $\frac{Q}{Q'}$ e $\frac{P}{P'}$ sarà pure $\frac{B}{A}$ compreso fra $\frac{Q}{Q'}$ e $\frac{P'}{P}$: ripetendo quivi il medesimo ragionamento che abbiamo fatto prima si arriverebbe alla dimandata conclusione.

212. Quest' ultima proprietà ci mostra il vantaggio che si può ricavare dalla riduzione di un numero in frazione continua, poichè le ridotte daranno una serie di valori approssimati che saranno i più semplici possibili, avuto riguardo al grado di approssimazione ottenuto.

Esempio 1.° Trovare valori approssimativi di $\frac{371}{547}$ *espressi col mezzo di frazioni più semplici possibili.*

Avendosi

$$\frac{371}{547}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}},$$

le ridotte successive saranno

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª
$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{19}{28}$,	$\frac{59}{87}$,	$\frac{78}{115}$,	$\frac{371}{547}$.

I valori approssimati sono queste differenti frazioni ridotte; ed è impossibile (come abbiamo visto al n.° precedente) trovare frazioni più semplici che si approssimino di più: le ridotte di posto impari 1.ª 3.ª 5.ª saranno minori della data frazione, quelle di posto pari 2.ª 4.ª 6.ª saranno invece maggiori, e l' ultima delle ridotte sarà la frazione generatrice.

Esempio 2.° *Trovare i valori approssimati della radice seconda del numero* 10 *espressi in frazioni più semplici possibili.*

Essendo 3 la parte intera di $\sqrt{10}$, scriviamo

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{y}:$$

sarà $$y.\sqrt{10}-3y=1\ ,$$ da cui

$$y=\frac{1}{\sqrt{10}-3}:$$

moltiplicando i due termini di questa frazione per $\sqrt{10}+3$, avremo

$$y=\frac{\sqrt{10}+3}{\{\sqrt{10}-3\}\,\{\sqrt{10}+3\}}=\sqrt{10}+3:$$

da questa si deduce che y è compresa fra 6 e 7, e poniamo perciò $y=\sqrt{10}+3=6+\frac{1}{z}$, da cui

$$z=\frac{1}{\sqrt{10}-3}:$$

e quindi $z=y$. Dunque il primo risultato si riproduce indefinitamente e nel medesimo ordine, e sarà

$$\sqrt{10}=3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}$$

Perciò i valori approssimati di $\sqrt{10}$ verranno espressi dalle ridotte

$$\frac{3}{1},\quad \frac{19}{6},\quad \frac{117}{37},\quad \frac{721}{228},\quad \frac{4443}{1405},\ldots$$

213. *Limite dell' errore che si commette nel prendere pel valore della frazione continua* $\frac{H}{K}$ *una ridotta qualunque* $\frac{P}{P'}$.

Essendo il valore della frazione continua $\frac{H}{K}$ compreso fra le due ridotte consecutive $\frac{P}{P'}$ e $\frac{Q}{Q'}$, ciascuna di queste due differisce dalla frazione continua di una quantità minore della loro differenza, la quale, fatta astrazione dal segno, è $\frac{1}{P'Q'}$. Quindi sarà

$$\frac{H}{K}-\frac{P}{P'}<\frac{1}{P'Q'},$$

ed a più forte ragione si avrà

$$\frac{H}{K}-\frac{P}{P'}<\frac{1}{P'^2},$$

essendo $Q'>P'$.

Dunque la differenza fra la frazione continua ed una ridotta qualunque, ossia l' errore che si commette nel prendere una ridotta invece della frazione generatrice sarà minore di una frazione che abbia per numeratore l' unità e per denominatore il quadrato del denominatore della ridotta, o con maggior precisione, sarà minore di una frazione che abbia per numeratore l' unità e per denominatore il prodotto dei due denominatori della presa ridotta, e della successiva.

Da questo si conclude che potremo determinare il limite dell' errore commesso nel prendere una ridotta per la frazione continua, e potremo pure trovare il valore di una frazione continua non finita con tanta approssimazione quanta si possa desiderare.

Esempio 1.° Data la frazione continua del numero precedente.

$$x=3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ldots}}}$$

quale è il limite dell' errore che si commette se si prende la terza ridotta invece della frazione continua?

Le prime ridotte essendo

$$\begin{array}{ccccc} 1.^a & 2.^a & 3.^a & 4.^a & 5.^a \\ \frac{3}{1}, & \frac{19}{0}, & \frac{117}{37}, & \frac{721}{228}, & \frac{4443}{1405}, \ldots \end{array}$$

l' errore commesso sarà minore di $\frac{1}{37.228}$.

Prendendo la quarta ridotta invece di $\sqrt{10}$, l' errore commesso sarà minore di $\frac{1}{228.1405}$.

Esempio 2.° Quale ridotta si deve prendere nella frazione continua

$$z=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

affinchè l' errore sia minore di $\frac{1}{4900}$?

Le ridotte sono $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$ ....

e perciò si dovrà prendere la sesta.

214. La frazione continua dicesi *periodica*, quando i suoi *quozienti incompleti* si ripetono periodicamente come nelle frazioni decimali periodiche semplici o miste. Nell' esempio del n.° 212 abbiamo visto una frazione continua periodica.

Ora riduciamo in frazione continua l' espressione algebrica

$$(18) \qquad x=\sqrt{m^2+1},$$

dove m è numero intero qualunque: vedremo che questa frazione continua diventa periodica.

La parte intera della radice seconda del numero (m^2+1) essendo m, si potrà scrivere

$$\sqrt{m^2+1}=m+\frac{1}{y},$$

da cui

$$(a) \qquad y=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}:$$

moltiplichiamo i due termini di questa frazione per $\sqrt{m^2+1}+m$, e si otterrà

$$y=m+\sqrt{m^2+1},$$

e siccome anche qui la parte intera di $\sqrt{m^2+1}$ è m così si potrà scrivere

$$y=2m+\frac{1}{y'},$$

avendo supposto che sia

$$(b) \qquad \sqrt{m^2+1}=m+\frac{1}{y'} .$$

L' equazione (1) pertanto diventa

$$(2) \qquad x=\sqrt{m^2+1}=m+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{y'}} .$$

Ora se dalla equazione (b) si trova il valore di y' si scorge subito che questo è uguale a quello di y tolto dalla (a); perciò si conclude che si avrà continuamente il medesimo risultato, e l' espressione $\sqrt{m^2+1}$ si cambierà nella frazione continua periodica

$$\sqrt{m^2+1}=m+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{2m+\dots}}}$$

In egual modo estraendo la radice quadrata da un numero qualunque che non sia quadrato perfetto, si troverebbe un risultato che sarebbe una frazione continua periodica.

Esempio. Sviluppare in frazione continua l' espressione $\sqrt{7}$.

La radice di 7 essendo compresa fra 2 e 3 si potrà porre

$$(1) \qquad \sqrt{7}=2+\frac{1}{x} ,$$

da cui

$$x = \frac{1}{\sqrt{7}-2},$$

e moltiplicando i due termini di questa frazione per $\sqrt{7}+2$ si ha

$$x = \frac{\sqrt{7}+2}{3},$$

che sarà compreso fra 1 e 2.

Sarà dunque

$$(a) \qquad x = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{1}{x_{,}}:$$

da questa si ha

$$x_{,} = \frac{3}{\sqrt{7}-1},$$

ed operando come prima, si trova

$$x_{,} = \frac{3\sqrt{7}+3}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{2},$$

quantità compresa fra 1 e 2.

Avremo quindi

$$(b) \qquad x_{,} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_{,,}},$$

da cui

$$x_{,,} = \frac{2}{\sqrt{7}-1},$$

ed operando come prima si ricava

$$x_{,,} = \frac{2\sqrt{7}+2}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3},$$

della quale, essendo una quantità compresa fra 1 e 2, si otterrà

$$(c)\quad x_{II}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=1+\frac{1}{x_{III}}.$$

Da questa si ha pure

$$x_{III}=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{3\sqrt{7}+6}{3}=2+\sqrt{7},$$

il cui valore essendo compreso fra 4 e 5, si scriverà

$$(d)\quad x_{III}=2+\sqrt{7}=4+\frac{1}{x_{IV}}.$$

Da questa si ha

$$x_{IV}=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3},$$ e quindi

come prima

(e) $x_{IV}=x$, e perciò ritornano nel medesimo ordine i medesimi valori già trovati.

Sostituendo pertanto nella (1) i valori dati dalle (a), (b), (c), (d), (e),... si avrà

$$(2)\quad \sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}$$

Se fosse data invece questa frazione continua periodica, e si dimandasse il suo valore, ecco come si potrebbe operare.

Chiamato y il valore dimandato, e z la parte periodica della frazione avremo le due relazioni

$$y=2+\frac{1}{z}, \qquad z=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{z}}}}$$

ossia fatte le riduzioni,

$$z=\frac{1}{y-2}, \qquad z=\frac{14z+3}{9z+2}; \qquad \text{dalle quali}$$

sostituendo si ha

$$\frac{1}{y-2}=\frac{14\left(\frac{1}{y-2}\right)+3}{9\left(\frac{1}{y-2}\right)+2},$$

la quale ridotta ci dà

$$y^2=7,$$

e perciò

$$y=\sqrt{7}.$$

215. Quando si riducono in frazione continua due valori V, V′ approssimati di un numero N, l'uno in più l'altro in meno, i quozienti incompleti comuni alle due espressioni apparteranno anche alla frazione continua che rappresenta il numero N.

Infatti siano i due valori approssimati

$$V=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\dots}}}}}\qquad V'=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e'+\cfrac{1}{f'+\dots}}}}}$$

e supponiamo che sia

$$V=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{y'},\ y'=c+\frac{1}{y''},\dots$$

$$V'=a+\frac{1}{z},\ z=b+\frac{1}{z'},\ z'=c+\frac{1}{z''},\dots$$

$$N=A+\frac{1}{x},\ x=B+\frac{1}{x'},\ x'=C+\frac{1}{x''},\dots$$

Le quantità V e V′ avendo la stessa parte intera a, questa sarà anche la parte intera del numero N che è compreso fra loro: dunque si avrà $a=A$. Poichè N è compreso fra V e V′, sarà pure x compreso fra y e z: ma queste due hanno la medesima parte intera b; dunque b sarà anche la parte intera di x: ossia sarà $B=b$.

Così seguitando si troverebbe $C=c$, $D=d$, e perciò sarebbe

$$N=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F+\dots}}}}}$$

Applicazione. Determiniamo i valori approssimati del rapporto della circonferenza al diametro espressi da frazioni che si approssimino più di qualunque altra frazione avente i termini più piccoli.

Chiamiamo π questo rapporto, e prendendo solamente le prime sette cifre decimali frazionarie del numero esprimente il valore di questo rapporto trovato da KEULEN, il quale valore è

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288,$$

questo valore sarà compreso tra

$$3,1415926 \quad \text{e} \quad 3,1415927,$$

i quali ridotti in frazione continua diventeranno

$$3,1415926 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{243..}}}}$$

$$3,1415927 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{354..}}}}$$

Se dunque si riducesse il valore di π in frazione continua si troverebbe

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}}}},$$

e fatte le ridotte $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$, ciascuna di queste si approssima al valore di π più di ogni altra frazione che abbia i termini minori.

La ridotta $\frac{22}{7}$ è il valore approssimato di π trovato da ARCHIMEDE: prendendo questo numero pel valore di π, si commette un errore in più ed è minore di $\frac{1}{7.106}$, ossia minore di $\frac{1}{742}$.

La quarta ridotta $\frac{355}{313}$ dà il valore approssimato di π trovato da MEZIO: questo numero è pure maggiore del rapporto π.

LUDOLFO VAN KEULEN celebre geometra olandese nacque a Hildesheim verso il 1550 e morì a Leida nel 1610.

ADRIANO MEZIO valente geometra olandese nacque ad Alcmaer il 9 dicembre 1571 e morì il 26 settembre 1635.

216. La riduzione di una frazione ordinaria in continua è utile tutte le volte che la medesima abbia termini molto grandi, e che vogliasi esprimerla con approssimazione con una frazione avente termini minori.

217. CATALDI è stato il primo scopritore delle frazioni continue, sebbene d' ordinario se ne attribuisca l' invenzione a lord BROUNCKER e a WALLIS. In seguito HUYGENS diede una teoria delle frazioni continue. EULERO introdusse il nome di *frazione continua*, ne studiò e ne aumentò la dottrina, la quale fu in modo particolare arricchita ed applicata alla risoluzione di importanti questioni da LAGRANGIA.

Infine su queste frazioni furono fatte ingegnose osservazioni da Wronski, il quale seppe dedurne leggi generali considerando queste frazioni come modo particolare di generazione di una frazione qualunque di una quantità variabile.

Pietro Antonio Cataldi matematico bolognese fu, giovanetto ancora, professore a Perugia nel 1572, e poscia nel 1584 fu nominato professore di Matematica all' università di Bologna, dove seguitò a dare lezioni senza interruzione quasi durante un mezzo secolo, e sino alla fine de' suoi giorni. Cataldi pubblicò un gran numero di lavori, fra i quali notiamo per primo per ragion di data = *due lettioni fatte nell' Accademia del disegno di Perugia*, Bologna, 1577 = E per tacere degli altri ricordiamo qui il *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*, Bologna, 1613, nel quale si adoperano le frazioni continue per trovare queste radici.

Guglielmo Brouncker matematico inglese nacque a Castel-Lyons verso il 1620, e morì a Westminster il 5 aprile 1684.

Giovanni Wallis matematico inglese nacque nel 1616 ad Ashford nella contea di Kent e morì nel 1703 in Oxford.

Cristiano Huygens matematico e fisico olandese nacque all' Aja nel 1629 e vi morì nel 1695.

Leonardo Eulero nacque a Basilea il 15 aprile 1707 e morì a Pietroburgo il 7 settembre 1783.

Il nome di questo illustre matematico dovrà per sempre brillare nei fasti delle scienze. Oltre le sue opere moltissime ed importanti che abbracciano tutti i diversi rami delle matematiche ei lasciò un numero sterminato d' importanti memorie nei volumi delle Accademie di Pietroburgo, Berlino, Parigi, ecc. Verso il 1727 fu chiamato a Pietroburgo da suoi amici Daniele e Nicolò Bernoulli, dove fu nominato professore di matematica: nel 1741 andò a professare le matematiche a Berlino, donde passò

di nuovo nel 1766 in Russia, ove ebbe la sventura di perdere la vista. Ebbe molti figli, tre dei quali (Giovanni Alberto, Carlo, Cristoforo) furono pure distinti matematici.

Questa breve nota su Leonardo non permette dare qui la lunga lista de' suoi scritti: i giovani studiosi che desiderano vederla, possono trovarla alla fine del secondo volume dell' edizione delle *Istituzioni del calcolo differenziale* di Eulero pubblicata a Pavia nel 1787 da Gregorio Fontana.

Giuseppe Luigi Lagrangia nacque in Torino il 25 gennajo 1736 e morì a Parigi il 10 aprile 1813. A 19 anni egli era professore di matematiche nella scuola d' artiglieria a Torino: in quel anno comunicò ad Eulero i primi saggi del *Metodo delle variazioni*, ed un anno dopo gli inviò una nuova applicazione di questo metodo. In questo tempo fondò in Torino insieme col dottor Cigna e col Saluzzo l' attuale Accademia delle scienze, che in breve raccolse nel suo seno tanti illustri ingegni. Il primo volume delle memorie di questa accademia pubblicavasi nell' anno 1759 ed era principalmente composto dei lavori di Lagrangia, che vi trattava i punti più importanti e più difficili d' analisi e di meccanica. Questi lavori del Lagrangia ed i posteriori ebbero un successo sì prodigioso che i grandi matematici di quel tempo, quali erano fra gli altri Eulero e d' Alembert, si affrettarono a mettersi in corrispondenza con lui. Nel 1759 fu nominato membro dell' accademia di Berlino, ed Eulero stesso, direttore della classe di matematica di quell' accademia, gliene diede la nuova con una lettera sommamente lusinghiera del dì 2 ottobre di quell' anno. Ai 6 di novembre del 1766 prese possesso del posto di direttore dell' accademia di Berlino chiamatovi da Federico il grande, ove succedette ad Eulero il quale ritornò a Pietroburgo.

Per le molte mutazioni avvenute a Berlino dopo la morte del gran Federico, e per le vive e calde preghiere fattegli per invitarlo a Parigi dagli scienzati francesi, e specialmente per le istanze di Mirabeau e dell' abate Marie, il Lagrangia lasciò Berlino e andò nel 1787 a stabilirsi a Parigi, ove pubblicò altre opere importantissime, fra le quali è da notarsi la *meccanica analitica* e passò il resto della sua vita sì gloriosamente cominciata in Italia e continuata in Prussia.

Del Lagrangia, che è stato uno dei più grandi matematici dei tempi moderni, qui noteremo quelle opere che sono state pubblicate separatamente.

1.° *Le addizioni all' algebra di Eulero:*
2.° *La meccanica analitica:*
3.° *Teoria delle frazioni analitiche:*
4.° *Risoluzione delle equazioni numeriche:*
5.° *Lezioni sul calcolo delle funzioni:*
6.° *Lezioni d' aritmetica ed algebra date alle scuole normali:*
7.° *Aritmetica politica.*

Esistono inoltre di Lagrangia cento e più memorie nelle collezioni accademiche di Torino, di Parigi e di Berlino, nelle *Effemeridi* di quest' ultima città, nella *Connaissance des tems*, e nel giornale della scuola politecnica.

Lagrangia ha lasciato pure una grande quantità di manoscritti che Carnot ministro dell' interno in Francia nel 1815 fece acquistare dal governo e donò all' Istituto.

CAPITOLO XI.

ANALISI INDETERMINATA DI PRIMO GRADO

---

218. *L' analisi indeterminata di primo grado* ha per fine di risolvere il seguente problema generale:

Date m equazioni di primo grado con un numero d' incognite maggiore di m, trovare le soluzioni intere, cioè i sistemi di valori interi positivi o negativi che sostituiti alle incognite, verificano tutte le equazioni.

Per cominciare dal caso più semplice considereremo ora una sola equazione di primo grado con due incognite, la quale si può ridurre alla forma

$$(1) \qquad ax+by=c\,.$$

219. Nella equazione generale (1) ammetteremo che i coefficienti a, b, c siano interi positivi o negativi, poichè se fossero frazionari si potrebbero sempre ridurli interi: come pure supporremo che gli stessi tre coefficienti siano *primi* fra loro, perchè se avessero un fattore comune, questo si potrebbe sopprimere.

Prima di risolvere l' equazione generale (1) sarà necessario premettere la dimostrazione di alcune proposizioni sulla medesima equazione $ax+by=c$.

220. Proposizione 1.ª *Se a e b hanno un fattore comune h differente dall' unità, l' equazione* (1) *non può avere soluzioni intere.*

Infatti, dividendo per h ambi i membri dell' equazione, si avrebbe per qualunque sieno i valori interi sostituiti ad x e y il primo membro *intero* eguale al secondo membro *frazionario;* la qual cosa è impossibile.

221. Proposizione 2.ª *Se a e b sono primi fra loro, l' equazione $ax+by=c$ ha una soluzione intera.*

Suppongo che il coefficiente di una delle incognite, per esempio di x, sia positivo: se non lo fosse, si potrebbe rendere tale col cambiare i segni a tutti i termini dell' equazione. Risolta l' equazione rispetto ad x si avrà

$$(2) \qquad x=\frac{c-by}{a}:$$

se in questa equazione si mettano invece di y successivamente gli a valori $0, 1, 2, 3, \ldots a-1$, si avrà un valore intero di x fra quelli che si ottengono, e se ne avrà un solo.

Dividiamo per a gli a valori che si ottengono da $c-by$ col sostituire invece di y i valori $0, 1, 2, 3, \ldots a-1$, facendo le divisioni in modo che tutti i resti siano positivi: questi saranno tutti differenti. Infatti se sostituendo successivamrnte alla y due valori (che chiamo y' e y'') presi fra $0, 1, 2, \ldots\ldots a-1$ si avessero i due quozienti q e q', ed i due resti eguali r e r, si avrebbero pure le due equazioni

$$\frac{c-by'}{a}=q+\frac{r}{a}, \quad \frac{c-by''}{a}=q'+\frac{r}{a},$$

ossia

$$c-by'=aq+r\,,\quad c-by''=aq'+r\,.$$

Fatta la sottrazione fra queste due si avrà

$$b(y''-y')=a(q-q')\,,$$

ovvero

$$\frac{b(y''-y')}{a}=q-q'\,:$$

essendo questo secondo membro quantità intera, il primo membro deve essere divisibile per a: ora questo è impossibile perchè a è primo con b, e non può dividere la differenza $y''-y'$ che è minore di a. Dunque gli a resti che risultano dalle successive divisioni sono tutti differenti; ma questi essendo numeri interi e minori di a, dovranno essere necessariamente i numeri 0, 1, 2, ... $a-1$, dunque uno di essi resti è zero. Chiamando quindi β il valore di y cui vi corrisponde il resto zero e detto α il valore corrispondente di x, si avrà la soluzione intera dimandata

$$x=\alpha\,,\quad y=\beta\,.$$

222. Proposizione 3.ª *Se l' equazione $ax+by=c$ ha una soluzione intera, ne ha un numero infinito.*

Sia $x=\alpha$, $y=\beta$ una soluzione intera della equazione $ax+by=c$; fatte le sostituzioni, avremo le due espressioni

$$ax+by=c\,,\quad a\alpha+b\beta=c\,,$$

dalle quali si ricava

$$ax+by=a\alpha+b\beta\,;$$

ossia (3) $$x-\alpha=\frac{-b(y-\beta)}{a}$$

Affinchè ad un dato valore di y corrisponda un valore intero di x è necessario e sufficiente che $b(y-\beta)$ sia divisibile per a: ma i coefficienti a e b sono per ipotesi primi fra loro, dunque è necessario e sufficiente che $y-\beta$ sia divisibile per a, ossia che si abbia $\frac{y-\beta}{a}=t$, essendo t un numero intero.

Si avrà dunque l' equazione

$$(4) \qquad y-\beta=at,$$

e dalla (3) sostituendovi questo valore di $y-\beta$ si avrà

$$(5) \qquad x-\alpha=-bt.$$

Queste due ultime equazioni ci daranno i valori

$$(6) \qquad \begin{cases} y=\beta+at, \\ x=\alpha-bt, \end{cases}$$

che soddisfano all' equazione (1), qualunque sia il valore intero positivo, nullo, o negativo che si voglia dare a t.

223. *Metodi per trovare le soluzioni intiere dell' equazione $ax+by=c$.*

Metodo 1.° Se il coefficiente di una delle due incognite è un numero assai piccolo, si può ottenere facilmente una soluzione dell' equazione mediante la proposizione seconda (n.° 221) e poscia le altre soluzioni colle formole (6) del n.° precedente.

Vogliasi con questo metodo trovare le soluzioni intere dell' equazione

$$6x-7y=17.$$

Trovando il valore di x si avrà

$$x=\frac{17+7y}{6}:$$

ora è evidente per le osservazioni fatte nel n.° 221, che dando ad y successivamente i valori 0,1,2,3,4,5, ad uno di questi valori di y corrisponderà un valore intero di x. Fatto il calcolo si trova che, facendo $y=1$, si ha

$$x=\frac{17+7}{6}=\frac{24}{6}=4:$$

dunque si ha la soluzione

$$x=4\,,\quad y=1\,,$$

e tutte le altre soluzioni intere della medesima equazione verranno date dalle formole (6) del n.° precedente

$$y=\beta+at=1+6t\,,$$
$$x=\alpha-bt=4+7t\,.$$

Esempi

Trovare con questo metodo le soluzioni intere delle equazioni
1.ª $3x+7y=11$, 2.ª $8x+5y=7$, 3.ª $2x+9y=13$.

Troppo lunga ed incomoda riesce l' applicazione di questo metodo, quando i coefficienti delle due incognite sieno entrambi numeri grandi.

224. Metodo 2.° Se una delle incognite ha il coefficiente eguale all' unità, si trova immediatamente una soluzione dell' equazione: infatti avendosi, per esempio, $x+by=c$, fatto $y=0$, si ottiene $x=c$. Vediamo ora come si possa ridurre a questo caso particolare la soluzione dell' equazione generale $ax+by=c$, nella quale supporremo che a, fatta astrazione dal segno, sia minore di b.

Trovando il valore di quell' incognita che ha il coefficiente più piccolo si avrà

$$x = \frac{c-by}{a}.$$

In questa facciamo le divisioni di c e di b per a spingendole quant' è possibile, ossia prendendo i quozienti per eccesso o per difetto, in modo da avere resti positivi o negativi, ma minori in valore assoluto di $\frac{a}{2}$: abbiasi per risultato

$$x = Q - qy + \frac{\pm c' \pm b'y}{a},$$

essendo Q e q i due quozienti, c' e b' i due resti.

È evidente che per avere una soluzione intera dovrà in quest' ultima equazione essere $\frac{\pm c' \pm b'y}{a} = z$, dove z indica una nuova incognita intera.

Da quest' ultima equazione si ha

$$(m) \qquad az \mp b'y = \pm c' :$$

se questa avesse una soluzione, per esempio $y=h$, $z=k$, è evidente che si avrebbe ancora una soluzione della proposta (1), poichè sarebbe in questa $y=h$, $x=Q-qh+k$.

Operando sulla equazione (m) come abbiamo fatto sulla (1), e così di seguito continuando sulle altre formeremo una serie di equazioni tali, che conosciuta una soluzione intera di una qualunque di esse, si potrà trovare una soluzione intera di ciascuna delle precedenti.

I coefficienti di queste diverse equazioni saranno eguali, fatta astrazione dal segno, a due resti conse-

cutivi ottenuti nella ricerca del massimo comun divisore dei numeri a e b, ma questi sono primi fra loro, perciò l' ultimo resto sarà l' unità, e l' ultima delle equazioni ausiliarie avrà la forma

$$rz_{n-1}+z_n=s,$$

dove r e s sono due numeri, z_{n-1} e z_n sono le due ultime incognite introdotte: quest' ultima equazione ammetterà una soluzione intera $z_{n-1}=0$, $z_n=s$, colla quale potremo trovare una soluzione della proposta equazione.

Esempio. Trovare le soluzioni intere dell' equazione

$$(a)\qquad 3x-5y=-7:$$

si ha $x=\frac{5y-7}{3}=2y-\frac{y}{3}-2-\frac{1}{3}$, ossia

$$x=2y-2-\frac{y+1}{3}:$$

fatto $\frac{y+1}{3}=z$, si avrà

$$(b)\qquad x=2y-2-z,$$

e dalla fatta ipotesi si ricava

$$(c)\qquad y=3z-1:$$

quest' ultima equazione ha la soluzione $z=0$, $y=-1$, e perciò la (b) ci dà l' altra

$$y=-1,\ x=-4.$$

Pertanto le soluzioni intere della equazione proposta (a) saranno date dalle due equazioni $x=-a+5t$, $y=-1+3t$, dove t, come sappiamo, è un numero intero e arbitrario.

Esempi

Trovare con questo metodo le soluzioni intere delle equazioni

1.ª $3x+8y=7$, 2.ª $7y-2x=5$, 3.ª $11x+13y=17$.

225. Se nella equazione da risolversi il coefficiente di una incognita, per esempio di x, ha un fattore comune f col termine cognito, i valori dell' altra incognita y saranno divisibili per f: perciò si potrà porre $y=fy'$, e poscia dividere tutta l' equazione per f, e così si avrà da risolvere un' equazione con i coefficienti più piccoli, ed il numero delle operazioni diventerà minore.

226. Metodo 3.° l' equazione generale (1) sia posta sotto la forma

$$(n) \qquad a(\pm x)-b(\pm y)=c,$$

dove a e b sono positivi: riducasi in frazione continua la frazione irreducibile $\frac{a}{b}$: e fatte le successive ridotte, ne sia $\frac{p}{q}$ la penultima, ossia quella che precede $\frac{a}{b}$: avremo (n.° 204)

$$\frac{a}{b}-\frac{p}{q}=\frac{aq-bp}{bq}=\frac{\pm 1}{bq}, \text{ ossia },$$

$$aq-bp=\pm 1 .$$

Moltiplichiamo ambi i membri di questa eguaglianza per $\pm c$, ed avremo

$$(n') \quad a(\pm qc)-b(\pm pc)=c.$$

Questa equazione non è che la (n), nella quale si è sostituito $\pm qc$ invece di $\pm x$ e $\pm pc$ invece di $\pm y$.

Dunque si soddisfarà all' equazione proposta prendendo

$$\pm x = \pm qc, \quad \pm y = \pm pc.$$

Esempio. Trovare con questo metodo le soluzioni intere della equazione $3x - 5y = -7$.

Si ha $\frac{3}{5} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$

e le ridotte sono $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$; la penultima essendo $\frac{1}{2}$, una soluzione intera della proposta si avrà dalle $x = -7.2 = -14$, $y = -7.1 = -7$, e le altre soluzioni intere si otterranno dalle

$$x = -14 + 5t, \quad y = -7 + 3t,$$

essendo t un numero intero arbitrario.

Esempi

Trovare con questo terzo metodo le soluzioni intere delle equazioni

1.ª $37x - 63y = 71$, 2.ª $143x + 210y = 323$.

227. I valori di x e y che si ottengono nella prima soluzione con questo terzo metodo sono moltipli del secondo membro dell' equazione proposta, e perciò la soluzione non è in generale la minima, cioè quella in cui il valore assoluto di una incognita è minore del coefficiente dell' altra, e che si ottiene col primo metodo e col secondo: ma è facile dedurne la soluzione minima.

Se nelle soluzioni dell' esempio precedente

$$x=-14+5t,\ y=-7\pm3t$$

vogliamo la soluzione nella quale x è minore di 5 coefficiente di y, basterà prendere t eguale al quoziente intero di 14 diviso per 5, che è 2, e si avrà

$$x=-14+5.2=-4,\ y=-7+3.2=-1.$$

Per rappresentare poscia tutte le altre soluzioni si prenderanno le formole $x=-4+5t$, $y=-1+3t$, che sono più semplici delle precedenti.

228. *Risoluzione in numeri interi e positivi dell' equazione* $ax+by=c$.

Supponiamo che il coefficiente a sia positivo (se non lo fosse si ridurebbe tale), e poniamo in evidenza i segni dell' altro coefficiente e del termine noto scrivendo le quattro equazioni

$$(1)\ ax+by=c, \qquad (2)\ ax-by=c,$$
$$(3)\ ax+by=-c, \qquad (4)\ ax-by=-c.$$

Ora volendo noi le sole soluzioni intere e positive è evidente che la terza equazione si deve sopprimere, perchè non può avere soluzioni intere e positive, e poichè l' ultima è compresa nella seconda, perchè cambiando i segni essa diventa $by-ax=c$, perciò rimangono da considerarsi i soli due casi

$$(1)\quad ax+by=c,$$
$$(2)\quad ax-by=c.$$

Esaminiamo l' equazione (1), e sia $x=\alpha$, $y=\beta$ una soluzione intera qualunque della medesima: tutte le altre soluzioni saranno date dalle formole (n.° 222)

$$x=\alpha-bt;\ y=\beta+at.$$

Affinchè i valori di x e y siano positivi è necessario e sufficiente che si abbiano le disuguaglianze

$$\alpha - bt > 0,\ \beta + at > 0, \text{ ossia}$$
$$t < \frac{\alpha}{b},\ t > -\frac{\beta}{a}:$$

e poichè dalla identità $a\alpha + b\beta = c$ si ricava

$\frac{\alpha}{b} = -\frac{\beta}{a} + \frac{c}{ab}$, perciò le due ultime disuguaglianze diventeranno

$$t > -\frac{\beta}{a},\quad t < -\frac{\beta}{a} + \frac{c}{ab}.$$

Dunque il numero delle soluzioni intere e positive dell' equazione proposta è limitato e sarà eguale al numero degli interi compresi fra $-\frac{\beta}{a}$ e $-\frac{\beta}{a} + \frac{c}{ab}$ e questo numero è espresso dal quoziente intero di c diviso per ab, o da questo quoziente aumentato di un' unità.

Consideriamo ora la seconda equazione (2) $ax - by = c$, e sia anche qui $x = \alpha$, $y = \beta$ una soluzione intera della medesima. Le altre soluzioni verranno date dalle formole

$$x = \alpha + bt,\quad y = \beta + at,$$

e per avere le soluzioni intere dovranno verificarsi le disuguaglianze

$$\alpha + bt > 0,\quad \beta + at > 0, \text{ ossia}$$
$$t > -\frac{\alpha}{b},\quad t > -\frac{\beta}{a}:$$

quindi si avranno soluzioni positive purchè si diano a t valori qualunque maggiori del più grande dei due numeri $-\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$, e perciò l' equazione proposta (2) ha un numero infinito di soluzioni intere e positive.

Esempio Risolvere in numeri interi e positivi col primo metodo l' equazione $3x+7y=23$.

Dalla $x=\frac{23-7y}{3}$ si trova la prima soluzione intera $y=2$, $x=3$, e perciò le altre soluzioni si avranno dalle equazioni

$$y=2+3t,\ x=3-7t:$$

ora volendosi soltanto le soluzioni intere e positive si dovranno verificare le due disuguaglianze

$$2+3t>0,\ 3-7t>0, \text{ da cui}$$

$$t>-\frac{2}{3},\ t<\frac{3}{7},$$

e perciò t dovrà essere zero. Dunque si avrà una sola soluzione intera e positiva che sarà $x=3$, $y=2$.

Problemi

1.° Alcuni giovani hanno spese lire 31 per comprare libri di matematica, e libri di letteratura italiana: ammesso che ciascun libro di matematica costasse lire 5, e ciascuno degli altri libri valesse 3 lire, si domanda il numero dei libri di matematica, e quello dei libri di letteratura.

2.° Trovare le soluzioni intere e positive dell' equazione $5x+7y=136$.

3.° Risolvere in numeri interi e positivi l' equazione $13x-7y=176$.

229. *Risoluzione in numeri interi di due equazioni di primo grado a tre incognite.*

Se fossero date le due equazioni a tre incognite

$$ax+by+cz=d\,,\quad a'x+b'y+c'z=d',$$

si eliminerebbe un' incognita, e si opererebbe sulla equazione risultante a due incognite, come abbiamo visto prima, per avere le soluzioni intere: di queste poi si dovranno conservare soltanto quelle alle quali corrispondono valori interi della terza incognita.

Esempio. Trovare le soluzioni intere delle equazioni

$$x+y+z=9\,,$$
$$2x+3y+4z=29\,.$$

In EUCLIDE e specialmente in DIOFANTO vi sono risolte questioni di analisi indeterminata; ma dobbiamo a BACHET di MEZIRIACO (secolo XVII) la soluzione generale delle equazioni indeterminate di primo grado, ed è dovuta al LAGRANGIA la risoluzione generale dell' equazione indeterminata del secondo grado.

CAPITOLO XII.

PROPORZIONI E PROGRESSIONI

---

§. 1. Proporzioni aritmetiche.

230. La differenza fra due quantità omogenee si chiama *ragione aritmetica*, o *rapporto aritmetico:* i rapporti aritmetici fra le quantità 20, 10; 3, 2; a, b; m, n saranno rispettivamente $20-10$, $3-2$, $a-b$, $m-n$.

La *ragione aritmetica* si compone dunque di due termini, il primo de' quali si chiama *antecedente*, il secondo *conseguente*.

231. Quando la differenza fra due quantità a, c è uguale alla differenza fra altre due quantità a', c', si dice che queste quattro quantità sono in *proporzione aritmetica* la quale si scrive

$$(1) \qquad a \,.\, c : a' \,.\, c'$$

e si legge a sta a c come a' sta a c'.

Nella proporzione (1) il primo e l' ultimo termine si chiamano *estremi*, gli altri i *medii*.

232. La proporzione (1) essendo l' eguaglianza fra due differenze si potrà anche scrivere sotto la forma dell' equazione

$a-c=a'-c'$, dalla quale si ha l' altra

$a+c'=a'+c$, dove si legge che *nelle proporzioni aritmetiche la somma degli estremi è uguale alla somma dei medii.*

Con questa proprietà si può sempre trovare il valore di un termine incognito della proporzione, se gli altri saranno noti.

Trovare i valori delle incognite dalle seguenti proporzioni aritmetiche:

1.ª $a \,.\, b : c \,.\, x$
2.ª $a \,.\, b : b \,.\, y$
3.ª $a \,.\, z : z \,.\, b$, nelle quali

la x si chiama quarta proporzionale aritmetica,
la y » terza » »
la z » media » »

§. 2. Progressioni per differenza.

233. La *progressione per differenza* o *progressione aritmetica* è una serie di termini, ciascuno dei quali si forma aggiungendo o togliendo al precedente una quantità costante chiamata *ragione* o *differenza*. I termini 2, 4, 6, 8, . , . . formano una progressione aritmetica la cui *ragione* o *differenza* sarà 2.

La progressione aritmetica si scrive sotto la seguente forma

$$\div 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \ldots$$

Quando i termini vanno aumentando, come in questo esempio, la progressione dicesi *crescente:* in questo caso la *ragione* è positiva: chiamasi poi *decrescente* la progressione se i suoi termini vanno diminuendo: allora la *ragione* è negativa, come nella seguente

$$\div 20 \,.\, 18 \,.\, 16 \,.\, 14 \ldots$$

234. *Osservazione.* Risulta dalla definizione della progressione aritmetica che questa si può sempre prolungare a destra ed a sinistra, e che i suoi termini si possono scrivere in ordine inverso.

235. PROPOSIZIONE 1.ª *Un termine qualunque di una progressione aritmetica è uguale al primo, più tante volte la ragione quanti sono i termini che lo precedono.*

Chiamato a il primo termine, e d la differenza costante, avremo la progressione

$$\div\ a\ .\ a+d\ .\ a+2d\ .\ a+3d\ .\ a+4d\ldots$$

Esaminando questa progressione si vede che il secondo è uguale al primo più una volta la ragione, il terzo è uguale al primo più due volte la ragione, il quarto è uguale al primo più tre volte la differenza, e così chiamato T il termine della progressione che occupa il posto n^{esimo} si avrà

$$(1)\qquad T=a+(n-1)d\,.$$

Il termine T si chiama il *termine generale*, e l' equazione (1) si chiama *formola del termine generale.*

Applicazione. Calcolare il termine 50° della progressione dei numeri pari $\div\ 2\ .\ 4\ .\ 6\ldots$

Sarà $T=2+2\ .\ 49=2+98=100$.

236. Nella equazione (1) $T=a+(n-1)d$, avendosi quattro quantità, si potrà sempre trovare ciascuna di queste, quando si conoscano le altre tre.

Applichiamo questa formola alla risoluzione del seguente

Problema: Inscrivere fra due numeri dati a e b m termini tali che formino una progressione aritmetica avente per termini estremi i due numeri dati a e b.

In questo quesito si conosce il primo termine, e l' ultimo della progressione, e si conosce il numero

$m+2$ dei termini che la compongono, e resta da determinarsi la ragione d. Perciò l' equazione

$$b=a+(m+1)d$$

risolta per rispetto alla d ci darà la soluzione del problema.

Esempio. Inscrivere fra i due termini 1 e 26 quarantanove termini tali che cogli altri due formino una progressione aritmetica.

237. PROPOSIZIONE 2.ª *In ogni progressione aritmetica la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale alla somma degli estremi.*

Infatti abbiasi la progressione

$\div\ a.a+d.a+2d\ldots\ a+(n-1)d.a+nd.a+(n+1)d:$

se sommiamo i termini equidistanti, si trovano sempre risultati identici.

238. PROPOSIZIONE 3.ª *La somma dei termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma degli estremi moltiplicata pel numero dei termini.*

Chiamata S la somma dei primi n termini della progressione aritmetica

$\div\ a.a+d.a+2d\ldots a+(n-3)d.a+(n-2)d.a+(n-1)d$

si avrà

$$S=a+\{a+d\}+\{a+2d\}+\ldots\ldots$$
$$+\{a+(n-3)d\}+\{a+(a-2)d\}+\{a+(n-1)d\},$$

e scrivendo i termini del secondo membro in ordine inverso si otterrà

$$S=\{a+(n-1)d\}+\{a+(n-2)d\}+\{a+(n-3)d\}+\ldots$$
$$+\{a+2d\}+\{a+d\}+a\,.$$

Ora sommiamo queste due ultime equazioni col prendere a due a due i termini corrispondenti: si ha

$$2S=\{a+a+(n-1)d\}+\{a+a+(n-1)d\}$$
$$+\{a+a+(n-1)d\}+\ldots.$$

Il numero dei termini del secondo membro è n, ed essendo questi tutti eguali fra loro si potrà anche scrivere

$$2S=\{+a+a(n-1)d\}n,$$

ossia (n.° 235)

$$2S=\{a+T\}n,$$

dalla quale si ricava

(2) $$S=\frac{a+T}{2}\cdot n,$$ la quale generalmente si scrive

(3) $$S=\frac{a+u}{2}\cdot n,$$ dove u indica il termine generale T od ultimo: questa equazione dà la somma dei primi n termini della progressione aritmetica, e perciò si chiama la *formola del termine sommatorio* nelle progressioni aritmetiche.

Da questa formola si troverà sempre il valore di una delle quattro quantità ivi contenute, purchè siano note le altre tre.

Esempi

1.° Trovare la somma di tutti i numeri naturali da 1 sino a 1000.

2.° Determinare la somma dei primi 20 termini della progressione aritmetica ÷ 50 . 55 . 60 . . .

3.° Quanti termini della progressione ÷ 3 . 6 . 9 . . . si devono sommare per ottenere 630.

§. 3. Proporzioni geometriche.

239. Il quoziente che si ottiene col dividere fra loro due quantità omogenee si chiama *ragione geometrica*, o *rapporto geometrico*: i rapporti geometrici fra le quantità

20, 10; 3, 2; a, b; m, n saranno rispettivamente

$$\frac{20}{10}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{m}{n}.$$

Il rapporto geometrico si compone perciò di due termini, il primo de' quali si dice *antecedente*, ed il secondo *conseguente*.

240. Quando il quoziente fra due quantità a, c è uguale al quoziente di altre due quantità a', c' si dice che queste quattro quantità formano una *proporzione geometrica*, o sono in *proporzione geometrica*, la quale si scrive sotto la forma $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$, ossia

(1) $\quad a : c : : a' : c'$ e si legge a sta a c, come a' sta a c'.

In questa proporzione a, a' sono detti *termini antecedenti*, c e c' i *conseguenti*.

241. Se l' equazione $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$ si riduce a termini interi, diverrà

(2) $\quad ac'=a'c$, dalla quale si deduce che *nelle proporzioni geometriche il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medî.*

Con questa proprietà sarà sempre facile trovare in una proporzione il valore di un termine qualunque, quando siano noti gli altri.

Nelle tre proporzioni geometriche

$$a : b :: c : x$$
$$a : b :: b : y$$
$$a : z :: z : b$$

la x si chiama quarta proporzionale
la y » terza »
la z » media »

242. Poichè la proporzione geometrica
(**1**) $a : c :: a' : c'$ risulta dalla equazione $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$, che si può anche scrivere sotto la forma $ac'=a'c$, così coi soli principî già visti sulle equazioni si potrà dimostrare che si possono fare sulla (**1**) le seguenti trasformazioni:

(α) $c : a :: c' : a'$, espressa colla parola *invertendo*
(β) $a : a' :: c : c'$, » » » *permutando*
(γ) $a+c : c :: a'+c' : c'$, » » *componendo*
(δ) $a-c : c :: a'-c' : c'$, » » *dividendo*

Si potrebbero pure dimostrare vere le altre seguenti trasformazioni:

(α′) $am : c :: a'm : c'$; $am : cn :: a'm : c'n$
(β′) $\frac{a}{m} : c :: \frac{a'}{m} : c'$; $\frac{a}{m} : \frac{c}{n} :: \frac{a'}{m} : \frac{c'}{n}$
(γ′) $a^m : c^m :: a'^m : c'^m$
(δ′) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{c} :: \sqrt[m]{a'} : \sqrt[m]{c'}$.

243. Abbiansi due quantità omogenee P, P′, ed altre due quantità pure omogenee Q, Q′; si dice che

le quattro quantità sono *proporzionali* o che formano una *proporzione diretta* quando una delle prime sta ad una delle seconde, come la rimanente delle prime sta alla rimanente delle seconde: così $P : P' :: Q : Q'$.

Si dice poi che sono *reciprocamente* o *inversamente proporzionali*, ovvero che formano una *proporzione inversa* quando una delle prime è ad una delle seconde, come la rimanente di queste è alla rimanente di quelle: p. es. $P : P' :: Q' : Q$.

Esempi

1.° Il profitto negli scolari è in ragione diretta dello studio.

2.° Due municipî m, m' debbono pagare una spesa di lire 1000 per la costruzione di un ponte in ragione inversa delle rispettive distanze dal detto ponte: quale sarà la quota spettante a ciascuno, se la distanza del primo è chilometri 50, e quella del secondo è chilometri 12.

244. Quando un rapporto fra due quantità è uguale al rapporto dei prodotti di due o più rapporti di altre quantità, si dice che le due prime stanno fra di loro in ragione composta delle altre quantità?

Se la ragione composta si forma del prodotto di ragioni eguali, questa si dirà

ragione duplicata	se le ragioni	saranno	due
ragione triplicata	»	»	tre
ragione quadruplicata	»	»	quattro

Esempi

$$\frac{x}{m}=\frac{abc}{a'b'c'};\quad \frac{x}{m'}=\frac{a^2}{a'^2};\quad \frac{x}{m''}=\frac{a^3}{a'^3};\quad \frac{x}{m'''}=\frac{a^4}{a'^4}.$$

§. 4. Progressioni per quoziente.

245. Dicesi *progressione per quoziente* o *progressione geometrica* una serie di termini, ciascuno dei quali si forma moltiplicando o dividendo il precedente per una quantità costante chiamata *ragione*, *quoziente* o *rapporto*.

I termini 4, 8, 16, 32,.... formano una progressione geometrica, il cui *quoziente* è 2.

Questa progressione geometrica si scrive sotto la forma $\div\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : \ldots$

Quando i termini vanno aumentando, come in questo esempio, la progressione dicesi *crescente:* in questo caso la *ragione* è maggiore dell' unità: chiamasi poi *decrescente* quando la ragione è minore dell' unità.

246. *Osservazione.* Si deduce dalla definizione della progressione geometrica che questa si può sempre prolungare a destra ed a sinistra, e che i suoi termini si possono scrivere in ordine inverso.

247. Proposizione 1.ª *Un termine qualunque di una progressione geometrica è uguale al primo moltiplicato per la ragione innalzata ad una potenza eguale al numero dei termini che lo precedono.*

Sia q la *ragione*, ed a il primo termine: si avrà la progressione

$$\div\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots$$

nella quale si vede che il secondo termine è uguale al primo moltiplicato per la ragione avente l' esponente 1, il terzo è uguale al primo moltiplicato per la ragione avente l' esponente 2, e così di seguito:

ed in generale chiamato T il termine che occupa il posto n^{esimo} si avrà

$$(3) \qquad T=aq^{n-1} .$$

Questa equazione che è la *formola* del *termine generale* nella progressione geometrica, contiene quattro quantità, ciascuna delle quali si potrà trovare, quando siano note le altre tre: vedremo più avanti come si possa risolvere questa equazione nel caso che l' incognita sia l' esponente della *ragione.*

Applicazione. Trovare il settimo termine nella progressione ÷÷ 2 : 4 : . . . .

248. Proposizione 2.ª *In ogni progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante ed uguale al prodotto dei due estremi.*

Se nella progressione

$$\div\div\ a : aq : aq^2 : \ldots aq^{n-2} : aq^{n-1} : aq^n ,$$

moltiplichiamo i termini equidistanti, si hanno prodotti sempre eguali.

249. Proposizione 3.ª *La somma dei termini di una progressione geometrica si ottiene sottraendo dal primo termine il prodotto dell' ultimo per la ragione, e dividendo il risultato per l' unità diminuita della ragione.*

Sia S la somma dei primi n termini della progressione geometrica del n.° 247, si farà

$$S=a+aq+aq^2+ \ldots . +aq^{n-1} ,$$

ossia moltiplicando per q

$$qS=aq+aq^2+aq^3+ \ldots . +aq^n :$$

sottraendo questa equazione dalla prima si ha

$$S(1-q)=a-aq^n,$$

da cui si ottiene

(4) $S=\frac{a-aq^n}{1-q}$, la quale generalmente si scrive

(5) $S=\frac{a-uq}{1-q}$, dove u indica il termine generale T od ultimo.

Esempio 1.° Trovare la somma dei primi dieci termini nella progressione geometrica

$$\div\!\!\div\, 1 : 3 : 9 : \ldots .$$

Esempio 2.° Calcolare la somma dei primi otto termini nella progressione

$$\div\!\!\div\, \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \ldots .$$

CAPITOLO XIII.

DEI LOGARITMI

§. 1. Proprietà dei logaritmi.

250. Chiamasi logaritmo di un numero l' esponente che si deve dare ad un numero positivo costante per riprodurre il numero proposto.

Nell' equazione $2^4=16$, il numero 4 è il logaritmo di 16, perchè è l' esponente che si deve dare al 2 per avere 16. Così nell' equazione $2^6=64$, il numero 6 è il logaritmo di 64.

In generale nell' equazione $b^x=n$, x è il logaritmo del numero n, ed il numero positivo costante b si chiama *base:* l' insieme poi dei logaritmi dei differenti numeri corrispondenti alla stessa base forma un *sistema di logaritmi.* È chiaro che si può prendere per *base* qualunque numero positivo, ad eccezione dell' unità.

251. I logaritmi di un medesimo sistema hanno proprietà molto importanti, delle quali daremo qui le dimostrazioni.

1.ª *Il logaritmo dell' unità è uguale a zero.* Infatti indicato con log. la parola *logaritmo*, dall' equazione $b^0=1$ si ricava log. $1=0$.

2.ª *Il logaritmo della base è uguale all' unità.* Invero dalla equazione $b^1=b$, si legge log. $b=1$.

3.ª *Il logaritmo di zero è uguale a* $-\infty$. Dalla relazione $b^{-\infty}=\frac{1}{b^{\infty}}=0$ risulta log. $0=-\infty$.

4.ª *Il logaritmo del prodotto di più fattori è uguale alla somma dei logaritmi di questi fattori.* Abbiansi i due numeri $b^p = n$, $b^q = n'$: moltiplicando avremo $b^{p+q} = n \cdot n'$, dove si ha $p + q = \log. (n \cdot n')$: ma per definizione è $p = \log. n$, $q = \log. n'$, dunque $\log. (n.n') = \log. n + \log. n'$.

5.ª *Il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale al logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore.* Infatti prendendo i due numeri precedenti si ha

$$b^{p-q} = \frac{n}{n'}, \text{ da cui } \log. \frac{n}{n'} = p - q = \log. n - \log. n'.$$

6.ª *Il logaritmo di una potenza di un numero è uguale al grado della potenza moltiplicato pel logaritmo di questo numero.* Abbiasi $b^q = n$: innalzando l' equazione all' esponente p si avrà $b^{pq} = n^p$, da cui $\log. n^p = qp$; ma dalla prima equazione si ha $\log. n = q$, dunque si ricaverà $\log. n^p = p. \log. n$.

7.ª *Il logaritmo della radice di una quantità è uguale al logaritmo di questa quantità diviso per l' indice della radice.* Se dai membri dell' equazione $b^q = n$ si estrae la radice p^{esima} si avrà

$$b^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{n}, \text{ da cui } \log. \sqrt[p]{n} = \frac{q}{p} = \frac{\log. n}{p}.$$

Esempi. Trovare i logaritmi dei seguenti termini;

$$3a, \; 3ab, \; 3a^2b^2, \; \frac{a}{b}, \; \frac{2a}{b}, \; \frac{3a^2}{b}, \; 2\sqrt{a}, \; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}.$$

252. Dalle proprietà dei logaritmi ora dimostrate apparisce chiaramente che potendosi considerare tutti i numeri come potenze diverse di una base comune, l' uso dei logaritmi nei calcoli numerici riesce molto

vantaggioso: poichè, supposti calcolati i logaritmi dei numeri in un dato sistema, alla moltiplicazione di due numeri si potrà sostituire l'addizione dei due logaritmi: alla divisione la sottrazione dei due logaritmi: all' elevazione a potenza di un numero la moltiplicazione del logaritmo del numero pel grado della potenza: all' estrazione di una radice, la divisione del logaritmo del numero per l' indice della radice.

253. L' invenzione dei logaritmi si deve a NAPIER il quale dedusse queste funzioni dal paragone degli spazi descritti da due punti che si muovono sopra rette indefinite, l' uno con velocità uniforme e l' altro con una velocità uniformemente accelerata. Questi spazi vengono rappresentati da due progressioni una aritmetica, e l' altra geometrica, dove è facile vedere che se scriviamo queste progressioni in modo che il primo dell' una corrisponda al termine primo dell' altra, e così di seguito, e se supponiamo che la geometrica abbia per primo termine l' unità, e l' altra per primo termine zero, come nelle due

$$\div\div 1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots ,$$
$$\div 0 \,.\, b \,.\, 2b \,.\, 3b \ldots\ldots ,$$

i termini della progressione aritmetica sono i logaritmi dei termini corrispondenti nell' altra. NAPIER trovò questi logaritmi coll' intercalare una serie di medii geometrici e medii aritmetici fra i termini della prima e fra i termini corrispondenti della seconda. Questi logaritmi sono detti *naturali, neperiani,* ed anche *iperbolici,* perchè essi rappresentano le aree dell' iperbola equilatera tra gli assintoti, essendo presa per unità l' area del quadrato inscritto.

NAPIER prese per base del suo sistema logaritmico il numero irrazionale 2,71828128.... che suolsi indicare colla lettera *e*.

Questo sistema presentava molti inconvenienti, ed era poco adatto alla prontezza del calcolo ordinario: perciò NAPIER ideò di cangiarlo prendendo per base il numero 10, ossia assumendo le due progressioni

$$\div\div 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \ldots,$$

$$\div\ 0 .\ 1 .\ 2 .\ 3 \ldots.,$$

e affranto dalle fatiche di quest' opera gigantesca raccomandò a *Briggs* l' esecuzione di questo nuovo sistema di logaritmi detti *volgari*, *decimali* o di *Briggs*.

GIOVANNI NAPIER barone di Scozia nacque a Merchiston nel 1550, e morì il 3 aprile 1617. Egli è divenuto celebre matematico per la scoperta dei logaritmi, e pei suoi lavori intorno alla trigonometria. NAPIER è noto ancora per le *analogie* che portano il suo nome, e che sono notabili per la loro eleganza e semplicità.

ENRICO BRIGGS matematico inglese nacque a Warley-Wood verso il 1556 e morì ad Oxford il 26 gennajo 1630. Egli è stato il primo a scorgere l' immensa utilità della scoperta di NAPIER, ed a lui dobbiamo la trasformazione delle tavole *neperiane* in *decimali*.

254. *Passaggio da un sistema logaritmico ad un altro.*

Vediamo come si possa fare questo passaggio applicandolo alla trasformazione delle tavole neperiane in quelle di Briggs.

Sia e la base nel sistema neperiano, N un numero, l il suo logaritmo già noto: si domanda il logaritmo x dello stesso numero N nel sistema che ha per base b.

Si avranno le due relazioni $N=e^l$, $N=b^x$, da cui

$$e^l=b^x\text{, e perciò sarà } \log.e^l=\log.b^x,$$

ossia $l.\log.e=x.\log.b$, ed essendo $\log.e=1$, rimarrà

$$x=\frac{l}{\log.b}=l.\frac{1}{\log.b}.$$

Dunque il logaritmo nuovo x sulla base b *eguaglia l' antico sulla base* e *moltiplicato per l' unità divisa pel logaritmo antico della nuova base.* La quantità costante $\frac{1}{\log.b}$, per la quale si deve moltiplicare l' antico per avere il nuovo logaritmo, si chiama *modulo*, che si suole indicare colla lettera M.

255. Noi parleremo soltanto dei logaritmi *volgari* o *decimali* essendo questi più comodi per le loro applicazioni ai calcoli numerici, e dimostreremo alcuni teoremi che risguardano i logaritmi che hanno perciò per base il numero 10.

256. Teorema 1.° *I logaritmi delle potenze esatte della base sono i numeri interi* 1,2,3,4, ... Infatti dalle equazioni $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, . . . si ha log. 10=1, log. 100=2, log. 1000=3, . . .

Dunque i numeri positivi minori di 10 hanno per logaritmo una frazione: quelli maggiori di 10 e minore

di 100 hanno per logaritmo un numero che sarà eguale a 1 più una frazione: quelli fra 100 e 1000 hanno per logaritmo un numero che sarà 2 più una frazione, e così di seguito. Perciò in generale il logaritmo ha due parti, la parte intera cioè che si chiama *caratteristica*, e la parte frazionaria che si dice *mantissa*: è chiaro da ciò, che ora abbiamo visto, che che la *caratteristica* del logaritmo di un numero è composto di tante unità quante sono le cifre del numero stesso meno una.

257. TEOREMA 2.° *I logaritmi delle frazioni proprie sono negativi.* Infatti avendosi $\frac{P}{Q}$, dove $P<Q$, si otterrà $\log.\frac{P}{Q}=\log.P-\log.Q$, che sarà una differenza negativa.

258. TEOREMA 3.° *Si moltiplica o si divide un numero intero per 10, 100, 1000, ... aumentando o diminuendo la caratteristica del suo logaritmo di una, due, tre, ... unità.* Invero, se N è il numero, si avranno le relazioni: $\log.(10.N)=1+\log.N$, $\log.(100.N)=2+\log.N$, $\log.(1000.N)=3+\log.N$, ... $\log.\frac{N}{10}=\log.N-1$, $\log.\frac{N}{100}=\log.N-2$, $\log.\frac{N}{1000}=\log.N-3$, ...

§. 2. Costruzione ed uso delle tavole logaritmiche.

259. In questo paragrafo si dovrebbe insegnare il modo di costruire le tavole logaritmiche; ma poichè se ne hanno molte già formate da benemeriti matematici;

fra i quali notiamo URSINUS, KEPPLER, BRIGGS, VLACQ, Cavalieri ai quali si deve la prima esecuzione delle medesime, così sarà utile il non ripetere i lunghi e laboriosi calcoli che si dovrebbero fare per tali costruzioni. Tuttavia per fare vedere la possibilità di calcolare il logaritmo di un numero qualunque sarà sufficiente il ricordare che al n.° 253 si è già indicato un metodo per trovare i logaritmi dei numeri.

260. *Costruzione dei logaritmi dei numeri multipli.* Per trovare il logaritmo del numero N composto dei fattori semplici a, b, c, dei quali si conoscano i logaritmi, basterà applicare la proposizione 4.ª (n.° 251) alla equazione $N=abc$, e si avrà $\log. N = \log. a + \log. b + \log. c$.

261. *Disposizione delle tavole logaritmiche.* Queste contengono due colonne principali: nella prima delle quali generalmente vi sono i numeri naturali 1,2,3.. e nell' altra i logaritmi corrispondenti: in alcune tavole è stata omessa la caratteristica, perchè questa è determinata facilmente dalle cifre del numero nella sua parte intera.

262. *Uso delle tavole logaritmiche.* Fra le molte tavole, che si hanno, sono maggiormente usate per la loro forma ed estensione quelle di GARDINER, CALLET, SANTINI, CAGNOLI, KÖHLER. Quelle di LALANDE che contengono con sette cifre decimali i logaritmi dei primi diecimila numeri naturali, possono usarsi molto utilmente e comodamente nei calcoli ordinari tanto dagli scolari quanto dai Periti e dagli Ingegneri i quali pure possono adoperare con vantaggio quelle di GIOVANNI LUVINI.

Perchè lo scolaro intenda più facilmente la soluzione dei seguenti problemi sull' uso di queste tavole,

supporrò che egli abbia le tavole del LALANDE, edizione di Parigi 1861, oppure quelle del LUVINI.

263. *Problema 1.° Trovare il logaritmo di un numero intero compreso nelle tavole.*

Se si volesse, per esempio, il logaritmo di 3624, si cerca questo numero nella prima colonna: questo numero si trova facilmente, e si vede che sulla medesima linea e nella seconda colonna vi corrisponde il logaritmo 3,5591882: perciò si ha log.3624=3,5591882.

264. *Problema 2.° Trovare il logaritmo di un numero intero non compreso nelle tavole.*

Domandasi il logaritmo del numero 38824. La caratteristica è 4, e la mantissa è la medesima (n.° 258) che quella del logaritmo di 3882,4: questo numero è compreso poi fra 3882 e 3883. Trovo nelle tavole questi due numeri, e veggo che le mantisse dei loro logaritmi sono rispettivamente 5890555 e 5891674, e perciò la mantissa dimandata sarà compresa fra queste due: dalla loro differenza, che è 1119, si vede che aumentando il numero 3882 di un' unità, aumenta di 1119 unità del settimo ordine decimale la mantissa del suo logaritmo. Ora cercando noi la mantissa del numero 3882,4, non bisogna aumentare il numero 3882 di un' unità, ma soltanto di $\frac{4}{10}=0,4$. Potremo dunque formare la seguente proporzione: se l' aumento di un' unità nel numero ci porta un aumento di 1119 unità del settimo ordine nella mantissa, l' au-

mento di soli quattro decimi nel numero quale aumento ci porterà nella mantissa? ossia si avrà la proporzione $1 : 1119 :: 0,4 : x$, da cui $x=448$, avendo accresciuta l' ultima cifra di un unità per trascurare la parte frazionaria. Aggiungendo pertanto alla mantissa 5890555 del logaritmo del numero 3882 la quarta proporzionale trovata 448, si avrà la mantissa cercata che è 5891003. Quindi si avrà

$$\log. 38824 = 4,5891003.$$

Per trovare questo risultato si è supposto che gli aumenti dei logaritmi siano proporzionali agli aumenti del numero: questa ipotesi non è rigorosamente esatta: ma potendosi dimostrare che quando il numero è maggiore di 10000, l' errore commesso generalmente cade dopo la settima cifra del logaritmo, così si può riguardare la proporzione come esatta.

265. Se il numero del quale si cerca il logaritmo sarà composto di sei o più cifre, si separano alla sinistra con una virgola tante cifre quante sono necessarie per formare un numero compreso nelle tavole, ma grande quanto è possibile; poscia si applicano i calcoli fatti nel numero precedente.

Giova pure avvertire che nelle nostre tavole in una colonna speciale vi sono le differenze fra due mantisse consecutive, ed in altre tavole vi sono ancora già preparati gli aumenti, che si dovrebbero trovare mediante l' indicata proporzione.

Esempi

Trovare i logaritmi dei numeri
594488; 114826; 2463448.

266. *Problema 3.° Trovare il logaritmo di un numero frazionario decimale.*

Vogliasi trovare il logaritmo del numero 25, 28. La caratteristica sarà 1, e soppressa la virgola il numero diventa 2528 che è il primo moltiplicato per 100: dunque la mantissa del logaritmo di 2528 (n.° 258) è la stessa che quella del logaritmo di 25, 28. Ora la mantissa del logaritmo di 2528 è 4027771, perciò si avrà log. 25, 28=1, 4027771.

Se il numero proposto, fatta astrazione dalla virgola, non è nelle tavole, per trovare la mantissa si adopera il metodo indicato nel secondo problema (n.[i] 264, 265).

Esempi

Trovare i logaritmi dei numeri

1, 5627; 33, 467; 1248, 2.

267. *Problema 4.° Calcolare il logaritmo di una frazione propria ordinaria o decimale.*

La proposizione 5.ª (n.° 251) ci indica come si deve operare per sciogliere questo quesito. Si avrà perciò

$$\log.\frac{2}{3}=\log.2-\log.3=-0,17609125.$$

$$\log.0,438=\log.\frac{438}{1000}=\log.438-\log.1000$$
$$=-0,35852589.$$

268. Nei calcoli logaritmici i matematici per rendere più facili le operazioni hanno convenuto di rendere positivi i logaritmi delle frazioni proprie coll' aggiungere ai medesimi il numero costante 10. Un logaritmo così accresciuto di 10 unità si chiama *complemento di logaritmo* o *complemento logaritmico* e si indica colla parola abbreviata *compl.* scritta prima del simbolo log. Perciò sarà

compl. log. $0{,}438 = -0{,}35852589 + 10 = 9{,}64147411$.

Nelle frazioni decimali, essendo il denominatore una potenza di 10, il logaritmo di questo sarà noto, poichè sarà composto di tante unità quante sono nella frazione le cifre alla destra della virgola. Quindi si può avere direttamente il complemento del logaritmo di una frazione decimale coll' aggiungere al logaritmo del numeratore il numero 10 diminuito di tante unità quante sono le cifre nella frazione a destra della virgola.

Problema 5.° *Dato un logaritmo positivo, trovare il numero corrispondente.*

Dalla data caratteristica si deduce immediatamente di quante cifre sarà composto il numero richiesto: mediante poi la mantissa troveremo quali siano queste cifre. Se la mantissa proposta è compresa nelle tavole, il numero dimandato si troverà immediatamente nella colonna dei numeri e nella medesima linea della mantissa.

Così si ha

$2{,}56584782 = \log.368$; $3{,}8123116 = \log.6491$.

Vediamo ora come si possa trovare il numero corrispondente ad un logaritmo che non sia compreso nelle tavole.

Vogliasi il numero corrispondente al logaritmo 3,8067260. Questa mantissa è compresa nelle tavole fra le due mantisse 8067225 e 8067903, alle quali corrispondono rispettivamente i due numeri 6408 e 6409; dunque il numero dimandato sarà 6408 più una frazione: la differenza fra le due mantisse, che comprendono la data, è 678 unità del settimo ordine la qual differenza ha portato un aumento di un' unità nel numero; la proposta mantissa differisce dalla inferiore di 35 unità del settimo ordine. Perciò, come precedentemente, potremo formare la seguente proposizione; se l' aumento di 678 unità del settimo ordine alla mantissa 8067225 produce un aumento di un' unità al numero 6408, l' aumento di sole 35 unità del settimo ordine alla stessa mantissa quale aumento produrrà allo stesso numero 6408? ossia
$678 : 1 :: 35 : x$, da cui $x = 0,05\ldots$ quindi sarà $3,8067260 = \log. 6408,05\ldots$

Esempi

Trovare i numeri corrispondenti ai logaritmi

0, 6906300; 2, 5717080; 3, 6425634.

269. *Problema 6.° Trovare il numero corrispondente ad un complemento logaritmico dato.* Dalla definizione del complemento è facile vedere che trovato il numero corrispondente al *complemento logaritmico* considerato come logaritmo, questo numero diviso per la potenza decima di dieci (n.° 258) sarà il numero richiesto.

Esempi

Trovare i numeri corrispondenti ai complementi logaritmici,

9,4849605; 8,6061481; 8,3839418.

270. *Problema 7.° Trovare il numero corrispondente ad un logaritmo negativo.*

Per sciogliere questo problema, si fa il complemento del dato logaritmo, e poscia si applica il metodo insegnato nel problema precedente.

Esempi

Trovare i numeri corrispondenti ai logaritmi,

—1,4862412; —2,4563382; —3,3848583.

§. 3. Applicazioni a diverse questioni.

271. *Problema 1.° Trovare l' ottava potenza di* 405.

Si avrà $\log.(405)^8 = 8.\log.405$: il numero corrispondente al logaritmo che risulta da questo prodotto sarà la potenza richiesta.

272. *Problema 2.° Trovare la radice ottava del numero* 3484.

Si porrà $\log.\sqrt[8]{3484} = \frac{\log.3484}{8}$: il numero corrispondente al logaritmo che risulta da questo quoziente, darà la dimandata radice.

273. *Problema 3.° Trovare la somma dei primi* 64 *termini nella progressione geometrica* $\div 2:4:8:\ldots$

L'ultimo termine sarà $T=aq^{n-1}=2\,.\,2^{63}=2^{64}$; sarà necessario calcolare coi logaritmi la potenza 64esima di 2, e poscia trovare la somma richiesta colla formola $S=\frac{uq-a}{q-1}$.

274. *Problema 4.° Quale è il valore di un capitale di lire* 1000 *impiegato ad interesse composto, alla tassa di* 5 *per* 100, *dopo* 20 *anni*?

Prima di risolvere questo problema gioverà ricordare quale sia la formola generale del frutto composto di un capitale costante.

Chiamato C il capitale, r il frutto annuo di una lira, n il numero degli anni, e fatto $1+r=q$, si avrà che una lira impiegata a frutto composto

dopo un anno diventa $1+r=q$,

» due anni » $q+qr=q(1+r)=q^2$,

» tre » » $q^2+q^2r=q^2(1+r)=q^3$,

. . . .

dopo n anni » $q^{n-1}+q^{n-1}\,.\,r=q^{n-1}(1+r)=q^n$.

Dunque se dopo n anni una lira diventa q^n, C lire diventeranno Cq^n, e chiamato S questo risultato finale sarà

$$(1)\qquad S=Cq^n.$$

Questa è la formola del frutto composto di un capitale costante.

Ora sarà facile risolvere il nostro problema, poichè non si ha che da sostituire invece di C, q ed n i suoi valori: avremo pertanto $S=1000.\,(1{,}05)^{20}$.

275. *Problema* 5.° *Per quanti anni bisogna lasciare impiegato un capitale* C, *colla tassa del* 5 *per* 100, *perchè esso acquisti un valore doppio.*

Dalla formola $S=Cq^n$ applicata a questo caso particolare si avrà $2C=C(1,05)^x$, da cui $2=(1,05)^x$: si avrà dunque $log.\ 2 = log,(1,05)^x$, e perciò $x=\frac{log.2}{log.1,05}$. In questa formola non vi è espresso il capitale C, e perciò il tempo che si cerca non dipenderà dal capitale, ma solamente dal frutto annuo.

276. *Problema* 6.° *Quanto si deve sborsare oggi per pagare un debito* D *infruttifero che scade dopo* 10 *anni.*

Ammesso che il frutto annuo corrente sia il 6 per 100, si avrà $D=x\ (1,06)^{10}$, dalla quale sarà facile trovare il valore di x.

277. *Problema* 7.° *Tizio mette a frutto composto al* 6 *per* 100 *un capitale* C *al principio di ogni anno di un decennio. Alla fine dei dieci anni quale sarà il credito di Tizio?*

Questo credito sarà composto di dieci somme prodotte dai dieci capitali posti a frutto composto: queste somme essendo

$$c(1,06)^{10},\ c(1,06)^9,\ c(1,06)^8, \dots\ c(1,06),$$

formano una progressione geometrica di dieci termini, la cui somma verrà data dalla formola

$$S=\frac{uq-a}{q-1}=\frac{c(1,06)^{11}-c(1,06)}{0,06},$$

nella quale è facile calcolare S.

CAPITOLO XIV.

EQUAZIONI TRASCENDENTI

---

278. Abbiamo già visto (n.° 78) quali siano le *equazioni trascendenti:* noi parleremo brevemente delle classi più semplici di queste equazioni.

Equazioni esponenziali. Se l' equazione esponenziale è binomia e non contiene che basi note, può essere ridotta ad una equazione algebrica mediante l' applicazione della teoria dei logaritmi.

Infatti abbiasi da risolvere

1.° $a^x = b$: evidentemente si ha $x = \frac{\log, b}{\log. a}$.

2.° $10^{x+1} = 100^{x-1}$:

sarà $(x+1). \log. 10 = (x-1). \log. 100$, da cui $x=3$.

3.° $a^x . b^x . c^x = m$; si avrà $x = \frac{\log. m}{\log. a + \log. b + \log. c}$

4.° $a^{c^x} = k$: si farà $c^x \log. a = \log. k$, da cui

$c^x = \frac{\log. k}{\log. a}$: e quindi ancora

$x. \log. c = \log. \log. k - \log. \log. a$: da questa sarà facile trovare il valore di x.

Non si hanno in generale delle regole per risolvere le equazioni esponenziali, alcune delle quali non si possono ridurre a forma algebrica, come sarebbero le due equazioni $m^x + n^x = p$, $y^y = m$.

L' equazione esponenziale semplice $a^x = b$ si potrebbe anche risolvere colla teoria delle frazioni continue: questo metodo consiste nello sviluppare x in frazione continua, e poscia prendere le successive ridotte. A questo metodo troppo lungo è utile anteporre l' altro ora spiegato e dipendente dall' uso delle tavole logaritmiche.

Esempi

Risolvere le equazioni
$3^x = 38$; $4^x \cdot 2_x = 50$; $5^{2x} = 1000$; $2^{3x} = 100$.

279. *Equazioni logaritmiche.* Abbiasi l' equazione $a.\log.x + b.\log.y = c.\log.z$: è facile vedere che questa equazione si cangia nella equazione algebrica
$x^a \cdot y^b = z^c$.

Se fosse data l' equazione
$(a + b\log.x)\log.x = \log.c$, questa, posto $\log.x = y$, si trasforma nell' altra $ay + by^2 = \log.c$, la quale è algebrica.

Anche per queste equazioni non si hanno regole per risolverle.

Esempio. Risolvere l' equazione $\log.x^2 - \log.(x-1)^2 = \log.\ 16$.

280. *Equazioni goniometriche.* Queste equazioni si riducono alla forma algebrica quando non contengono che una sola funzione di un angolo incognito, e potenze della medesima.

Abbiasi l' equazione $a\ \text{Sen}.x + b\,\text{Cos}.x = c$: fatto $\text{Sen}.x = y$, sarà $\text{Cos}.x = \sqrt{1-y^2}$; e la data equazione goniometrica si cambierà nell' altra algebrica
$ay + b\sqrt{1-y^2} = c$.

Non si possono ridurre algebriche le equazioni
$\text{Cos}.x = x$, $\text{Cot}.x = x$, $\text{tang}.x = x$.

CAPITOLO XV.

EQUAZIONI ALGEBRICHE DETERMINATE AD UNA SOLA INCOGNITA

§. 1. Proprietà generali delle equazioni algebriche.

281. Supporremo che l' equazione, della quale cerchiamo le proprietà, sia di grado m, e sia una funzione algebrica razionale ed intera dell' incognita x: se l' equazione avesse potenze frazionarie dell' incognita, o potenze negative questa si potrebbe sempre cambiare in un' altra che abbia potenze intere e positive dell' incognita.

282. Fatte in quest' equazione tutte le riduzioni possibili, e trasportati tutti i termini nel primo membro, se la ordineremo secondo le potenze decrescenti dell' incognita x, e la divideremo pel coefficiente del primo termine, questa si ridurrà alla forma

$$(1) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0,$$

nella quale A_1, A_2, A_3, ... sono quantità costanti.

L' equazione (1) che si può rappresentare anche con $f(x)=0$, dicesi *ordinata.* Il numero de' suoi termini è $m+1$: se di questi non ne manca alcuno, essa dicesi *completa.*

Dicesi *radice* di un' equazione (n.° 74) qualunque espressione reale o immaginaria che sostituita nel l' equazione invece dell' incognita, rende il primo

membro eguale allo zero (essendo zero il secondo membro della (1)).

Le radici delle equazioni si distinguono in *reali* ed *immaginarie,* e le reali in *positive* e *negative,* in *razionali* ed *irrazionali,* in *eguali* o *multiple* e *disuguali* o *semplici.*

283. Proposizione 1.ª *Se* a *è una radice della equazione* (1), *questa sarà divisibile esattamente pel binomio* $x-a$.

Prima di dimostrare questa proposizione giova premettere che ogni equazione ammette sempre una radice della forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, dove β può essere anche zero (*).

Ciò posto veniamo alla dimostrazione della prima proposizione.

Dvidendo $f(x)$ per $x-a$ si abbia il quoziente $\phi(x)$, ed il resto R: si avrà la relazione $\frac{f(x)}{x-a}=\phi(x)+\frac{R}{x-a}$, da cui $f(x)=(x-a)\phi(x)+R$. Facendo in questa $x=a$: essa diventerà $f(a)=R$: ma a è radice della equazione $f(x)=0$, dunque sarà $f(a)=0$ e perciò anche $R=0$, ossia nella divisione superiore non v' è resto. Si avrà dunque $f(x)=(x-a)\,\phi(x)=0$, essendo $\phi(x)$ il quoziente.

284. Proposizione 2.ª *Se* a, b, c, ... p *sono le* m *radici della equazione* $f(x)=0$, *si potrà porre*

$$(2)\quad f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)=0.$$

(*) Questa proprietà è stata dimostrata dal celebre matematico francese Agostino Luigi Cauchy morto il 23 maggio 1857.

L' equazione $f(x)=0$ di grado m essendo stata divisa per $x-a$ darà per quoziente l' equazione $\varphi(x)=0$ che sarà di grado $m-1$. Ma anche questa equazione deve avere una radice che possiamo chiamare b, e sarà perciò divisibile per $x-b$. Si avrà dunque

$$\varphi(x)=(x-b)\,F(x)=0.$$

La equazione $F(x)=0$ sarà di grado $m-2$, ed avrà anche essa una radice che diciamo c: perciò avremo qui pure

$$F(x)=(x-c)\,P(x).$$

Così si può procedere nelle successive divisioni fino a che si arrivi ad una equazione di primo grado, la quale avrà una sola radice che possiamo chiamare p, e sarà divisibile per $x-p$.

Ad ogni divisione che facciamo si abbassa di un grado l' equazione, e ad ogni operazione vi corrisponde una nuova radice: perciò una equazione di grado m ha m radici.

Pertanto riassumendo i superiori risultati avremo

$$(2)\quad f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-p)=0.$$

I fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... $x-p$ si chiamano *fattori lineari*, o *divisori semplici* dell' equazione.

285. Da questa proposizione si deduce che se le radici sono reali e positive, l' equazione avrà i segni alternativamente positivi e negativi: e se avrà tutte le sue radici negative e reali, tutti termini dell' equazione saranno positivi,

Infatti nel primo caso i fattori sono $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... e perciò per la regola dei segni della moltiplicazione il prodotto finale ha i segni alternativamente positivi e negativi.

Nel secondo caso poi i fattori divengono $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... e quindi nell' equazione non vi sarà alcun termine negativo.

286. Proposizione 3.ª *Un' equazione con coefficienti reali non può avere una sola radice immaginaria, e se ne ha una della forma* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, *ne avrà un' altra della forma* $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

Si divida l' equazione $F(x)=0$ pel fattore lineare $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$: non vi sarà resto, ed il quoziente sarà composto di quantità reali che chiameremo $\phi(x)$, e di quantità immaginarie che indicheremo con $f(x)\sqrt{-1}$; avremo

$$(m) \qquad \frac{F(x)}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\phi(x)+f(x)\sqrt{-1},$$

da cui

$$F(x)=(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})\{\phi(x)+f(x)\sqrt{-1}\}=0:$$

Perchè questa equazione sussista dovranno le quantità reali annullarsi fra loro, come pure la somma delle quantità immaginarie essere eguale allo zero: si avrà dunque dal secondo membro

$$x.\phi(x)-\alpha.\phi(x)+\beta f(x)=0$$
$$x.f(x)\sqrt{-1}-\beta.\phi(x)\sqrt{-1}-\alpha f(x).\sqrt{-1}=0:$$

da quest' ultima si trova

$$f(x).\sqrt{-1}\{x-\alpha\}-\beta.\phi(x)\sqrt{-1}=0,$$

da cui

$$\phi(x)=\frac{f(x).\sqrt{-1}\{x-\alpha\}}{\beta.\sqrt{-1}}=\frac{f(x)(x-\alpha)}{\beta}.$$

Si sostituisca questo valore nella equazione (m): si otterrà

$$\frac{F(x)}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\frac{f(x)(x-\alpha)}{\beta}+f(x)\sqrt{-1}$$

$$=\frac{f(x)(x-\alpha)+\beta.f(x)\sqrt{-1}}{\beta},$$

e quindi

$$\frac{F(x)}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\frac{f(x)\{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}\}}{\beta}.$$

Dunque divisa la F $(x)=0$ pel fattore lineare $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, il quoziente che ne risulta è esso pure divisibile per l' altro fattore $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ossia il quoziente avrà una radice che sarà $x=\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

Queste due radici immaginarie $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $x=\alpha-\beta\sqrt{-1}$ diconsi *conjugate*, e l' equazione $F(x)=0$ sarà divisibile pel fattore di secondo grado $(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})\ (x-\alpha+\beta\sqrt{-1})$.

287. Proposizione 4.ª *Nella equazione*

$$f(x)=x^m+A_1\,x^{m-2}+A_2\,x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m=0$$

il coefficiente del secondo termine è uguale alla somma delle radici col segno contrario, il coefficiente del terzo termine è uguale alla somma dei prodotti binari delle radici, il coefficiente del quarto termine è uguale alla somma dei prodotti ternari delle radici col segno cambiato ecc., l' ultimo coefficiente o termine noto è uguale al prodotto delle radici preso col proprio segno, o segno contrario secondo che m *è pari o dispari.*

Essendo $f(x)=(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ \ldots\ (x-p)$, dalle formole del n.° 134 si vede immediatamente

che eseguita la moltiplicazione, ed ordinato il polinomio secondo le potenze decrescenti della incognita x, fatta astrazione dai segni, il coefficiente del secondo termine è la somma delle radici, il coefficiente del terzo è la somma dei prodotti binari delle medesime ecc. . . . . . e l' ultimo termine è il prodotto delle radici nella moltiplicazione di questi fattori le radici vanno prese col segno contrario, e perciò il coefficiente del secondo termine sarà eguale alla somma delle radici col segno cambiato, il coefficiente del terzo termine sarà eguale alla somma dei prodotti binari col medesimo segno, perchè le radici si prendono a due a due, il coefficiente del quarto termine è uguale alla somma dei prodotti ternari col segno cambiato, perchè si prendono a tre a tre ecc., e l' ultimo termine sarà eguale al prodotto delle radici col medesimo segno o segno contrario secondochè queste saranno di numero pari o dispari.

Queste relazioni fra le radici di un' equazione ed i suoi coefficienti furono confusamente indicate da Viete, e sviluppate con somma sagacità da Harriot, il quale è stato pure il primo ad osservare che tutte le equazioni degli ordini superiori sono prodotti di equazioni semplici.

288. Da questa proposizione si deducono le seguenti proprietà:

1.ª Quando la $f(x)=0$ manca del secondo termine, la somma delle radici è zero.

2.ª Se la $f(x)=0$ manca dell' ultimo termine, almeno una delle radici è zero.

3.ª Quando nell' equazione $f(x)=0$ di grado m si conoscono $m-1$ radici a_1, a_2, a_3, ... a_{m-1} é facile trovare la m^{esima}, poichè questa sarà eguale al coefficiente del secondo termine col segno cambiato diminuito della somma delle date radici.

Applicazione. Date le radici $+2$ e $+1$ dell' equazione $x^3+2x^2-x+3=0$, trovare la terza.

4.ª Se due equazioni hanno le medesime radici, avranno ancora i medesimi coefficienti.

5.ª Per costruire un' equazione con date radici, basterà formare successivamente la somma delle radici, la somma dei prodotti binari, la somma dei prodotti ternari ecc., le quali quantità saranno i coefficienti della dimandata equazione, avendo però le debite avvertenze ai segni.

Si potranno anche costruirle facendo il prodotto di tutti i *fattori binari.*

289. Proposizione 5.ª *Quando un' equazione ha n radici eguali allo zero, i coefficienti degli n ultimi termini sono nulli.*

Infatti il primo membro dell' equazione dovrà essere divisibile per gli n fattori binari $(x-0)$, $(x-0)$, $(x-0)$, ... ossia dovrà essere divisibile per $(x-0)^n=x^n$: dovranno essere perciò *zero* tutti i termini che hanno la x ad una potenza minore di n, ossia saranno nulli tutti gli ultimi n termini.

Applicazione. L' equazione $x^8+ax^7+bx^6+cx^5=0$ quante radici eguali allo zero avrà?

290. Proposizione 6.ª *Se un' equazione non contiene che i termini delle potenze pari dell' incognita, le sue radici saranno eguali a due a due e di segno contrario.*

Infatti l' equazione avrà la forma
$x^{2m}+ax^{2m-2}+bx^{2m-4}+\ldots+hx^2+k=0$, e fatto $x^2=y$, si cambierà nell' altra
$y^m+ay^{m-1}+by^{m-2}+\ldots+hy+k=0$:
se in questa equazione le radici saranno
y_1, y_2, y_3, ... y_m, dalla ipotesi fatta $x^2=y$, si ricaverà
$x_1=\pm\sqrt{y_1}$, $x_2=\pm\sqrt{y_2}$, $x_3=\pm\sqrt{y_3}$, ...
$x_m=\pm\sqrt{y_m}$.

291. Proposizione 7.ª *Se tutte le radici d' una equazione sono eguali a due a due e di segno contrario, quest' equazione ridotta alla forma* (1) *non conterrà che le potenze pari dell' incognita.*

Infatti se le radici sono $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, ...
il primo membro sarà
$(x+\alpha)(x-\alpha)(x+\beta)(x-\beta)(x+\gamma)(x-\gamma)\ldots\ldots$,
che si cambia nell' altro
$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)\ldots\ldots$, nel quale non vi saranno potenze dispari.

§. 2. Delle derivate.

292. Abbiasi una funzione della x espressa dalla $f(x)=ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots\ldots+px+q$: se in questa si cangia x in $x+k$ e si eseguisce lo sviluppo di $f(x+k)$ secondo le potenze intere, positive e crescenti di k, il coefficiente della prima potenza di k è ciò che si chiama *funzione derivata* 1.ª di $f(x)$, o semplicemente *funzione derivata* di $f(x)$.

Facciamo questa sostituzione nella funzione superiore: si avrà
$f(x+k)=a(x+k)^{m}+b(x+k)^{m-1}+c(x+k)^{m-2}+\ldots.$
$+p(x+k)+q$: fattone lo sviluppo ed ordinato secondo le potenze crescenti di k si ricaverà

$$
\begin{aligned}
f(x+k)&=ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots\ldots+px+q\\
&+k\{max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+(m-2)cx^{m-3}+\ldots+p\}\\
&+\frac{k^2}{2}.\left\{m(m-1)ax^{m-2}+(m-1)(m-2)bx^{m-3}+\ldots\right\}\\
&+\frac{k^3}{2.3}.\left\{m(m-1)(m-2)ax^{m-3}\right.\\
&\qquad\left.+(m-1)(m-2)(m-3)bx^{m-4}+\ldots\ldots\right\}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Dunque la *derivata prima* della funzione $f(x)$, che si indica con $f'(x)$ sarà
$f'(x)=max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+(m-2)cx^{m-3}+\ldots+p.$
Da ciò si deduce che la *derivata* di una funzione algebrica intera e razionale si ottiene moltiplicando ciascun termine per l' esponente della variabile, e diminuendo questi esponenti di un' unità.

293. Essendo la derivata prima $f'(x)$ una nuova funzione della x, si potrà trovare egualmente la derivata di questa che potremo indicare con $f''(x)$: questa nuova derivata dicesi *derivata seconda* di $f(x)$. Egualmente trovando la derivata di $f''(x)$, questa sarà la *derivata terza* di $f(x)$, e si indica con $f'''(x)$, e così di seguito.

Applicazione 1.ª Quale è la derivata prima di $f(x)=x^3+8x^2+5x+2$?

Si avrà $f'(x)=3x^2+16x+5$.

Applicazione 2.ª Trovare le derivate di

$f(x)=2x^3-5x^2+4x+3$, si avranno le derivate

$$f'(x)=6x^2-10x+4,$$
$$f''(x)=12x-10,$$
$$f'''(x)=12,$$
$$f^{IV}(x)=0.$$

294. Se della $f(x)$ facciamo le derivate 2.ª 3.ª 4.ª... queste saranno

$$f''(x)=m(m-1)ax^{m-2}+(m-1)(m-2)bx^{m-3}\ldots$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)ax^{m-2}+(m-1)(m-2)(m-3)bx^{m-4},\ldots.$$

. . . .

Ora sostituendo nella $f(x+k)$ queste derivate simboliche si avrà

$$f(x+k)=f(x)+kf'(x)+\frac{k^2}{2}\cdot f''(x)+\frac{k^3}{2.3}f'''(x)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ak^m.$$

295. Indicheremo qui il modo di trovare le derivate di alcune funzioni speciali.

1.ª La derivata del prodotto di più fattori è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono col moltiplicare la derivata di ciaschedun fattore pel prodotto di tutti gli altri.

Esempio

$$f(x)=3x^2\{x^3-2x^2+4x+2\}$$
$$f'(x)=6x\{x^3-2x^2+4x+2\}+3x^2\{3x^2-4x+4\}$$

2.ª La derivata di un quoziente è uguale ad una frazione, il cui numeratore è il prodotto del divisore moltiplicato per la derivata del dividendo, diminuito del prodotto del dividendo per la derivata del divisore, ed il denominatore è il quadrato del divisore.

Esempio

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x+2}\ ;\ f'(x)=\frac{(2x+2)2x-(x^2+1)4}{(2x+2)^2}.$$

3.ª La derivata di una funzione di una funzione è uguale al prodotto delle derivate delle funzioni che la compongono.

Esempio

$$F(x)=f(\phi(x))\ ;\ F'(x)=f'.\phi'(x).$$

4.ª La derivata del seno è il coseno.

Esempio

$$f(x)=\text{Sen. } x\ ;\ f'(x)=\text{Cos. } x.$$

5.ª La derivata della tangente è l' unità divisa pel quadrato del coseno.

Esempio

$$f(y)=\text{Tang. } y\ ;\ f'(y)=\frac{1}{\text{Cos.}^2 y}.$$

6.ª La derivata della secante è il seno diviso pel quadrato del coseno.

Esempio

$$f(x) = \text{Sec. } x \; ; \; f'(x) = \frac{\text{Sen. } x}{\text{Cos.}^2 x} .$$

7.ª La derivata del logaritmo di un numero x è uguale al *Modulo* diviso per lo stesso numero n.

Esempio

$f(x) = \log. x \; ; \; f'(x) = \frac{M}{x}$ e nel sistema *neperiano* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

296. Prima di passare alla trasformazione delle equazioni è utile ricordare qui un' applicazione di queste derivate nella ricerca dei *massimi* e *minimi di una funzione* $f(x)$.

Se in questa funzione $f(x)$ facendo crescere la variabile x in un modo continuo dal valore α al valore β, la derivata si mantiene positiva, la funzione è crescente per tutti i valori di x compresi fra α e β; se al contrario la derivata si mantiene negativa, la funzione è decrescente.

La dimostrazione di questo teorema si ricava facilmente dalla formola già trovata e dovuta a Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \ldots .$$

Perciò se la funzione continua $f(x)$ è crescente per alcuni valori di x compresi fra α e β e se a partire da uno di essi α', continuando la x a crescere sino a β, la $f(x)$ è decrescente, allora si dice che la $f(\alpha')$ é un *massimo*; se al contrario è la $f(x)$ decrescente da α ad α' e crescente da α' a β, allora si dice che la $f(\alpha')$ è un *minimo*.

Ma pel teorema precedente il passare della $f(x)$ dallo stato di aumento a quello di decremento porta cambiamento di segno nelle sua derivata, perciò si conclude:

1.° Che la funzione $f(x)$ non può divenire nè un *massimo* nè un *minimo*, finchè col crescere della x la derivata conserva lo stesso segno.

2.° Se cangia il segno della derivata quando la x raggiunge un valore α' e lo supera, la funzione $f(x)$ diverrà per quel valore un *massimo* quando la derivata passa dallo stato *positivo* al *negativo*, o un *minimo* se la derivatà passa dal *negativo* al *positivo*.

3.° La funzione derivata $f'(x)$ non potendo passare dallo stato *positivo* al *negativo* o viceversa senza passare per lo *zero*, i valori di x che rendono $f(x)$ *massimo* o *minimo* sono quelli che rendono $f'(x)$ eguale allo zero, ossia le sue radici.

4.° Per trovare dunque il *massimo* o *minimo* di una funzione $f(x)$ si potrà usare del seguente metodo:

Della $f(x)$ si faccia la derivata prima $f'(x)$, la quale posta eguale allo zero abbia per radice $a, b, c, d, \ldots$ scritte in ordine decrescenti: se in luogo di x nella $f(x)$ si sostituiranno le radici 1ª, 3ª, 5ª, ... della $f'(x)$, la proposta funzione diventerà un *minimo*; se invece si metteranno nel posto della x le radici 2ª, 4ª, 6ª, ... la $f(x)$ diventerà un *massimo*.

Applicazione. Abbiasi $f(x)=x^3-3x+1$: sarà $f'(x)=3x^2-3$. Fatto $3x^2-3=0$, si ha $x_1=1, x_2=-1$. Dunque se nella $f(x)$ si sostituisce invece di x la radice maggiore $x_1=1$ si avrà un valore minimo della funzione $f(1)=1-3+1=-1$.

§. 3. Della trasformazione delle equazioni.

297. Dicesi *trasformazione* di un' equazione quella operazione analitica per mezzo della quale da una data equazione $f(x)=0$ se ne ricava un' altra $F(y)=0$

detta *trasformata*, le cui radici abbiano con quelle della prima equazione una data relazione.

La ricerca della *trasformata* consiste nel determinare il suo grado ed i suoi coefficienti.

Insegneremo soltanto alcuni casi particolari di trasformazione.

1.° Trasformare un' equazione $f(x)=0$ in un' altra in cui le radici siano eguali a quelle della data diminuita di h. Le nuove radici saranno rappresentate dalla $y=x-h$: perciò sarà $x=y+h$. Si sostituisca dunque nella $f(x)=0$ invece di x la $x+h$, e si avrà $f(y+h)=0$. Sviluppando il primo membro (n.° 294) si avrà $f(y+h)=f(h)+f'(h).y+f''(h).\frac{y^2}{2}$

$$+\frac{f'''(h).y^3}{2.3}+\ldots+y^m=0.$$

Le $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, ... non sono che la proposta e le sue derivate, nelle quali si è posto h invece di x.

Applicazione. Abbiasi l' equazione $f(x)=x^3-7x+16=0$. Trasformare questa equazione in un' altra le cui radici siano quelle della proposta diminuite di 4.

2.° Trasformare la $f(x)=0$ in un' altra, le cui radici siano h volte più grandi di quelle della proposta: si dovrà fare $y=hx$, da cui $x=\frac{y}{h}$; se la data fosse

$$f(x)=x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}\pm\ldots\pm px+q=0,$$

la trasformata sarebbe

$$\varphi(y)=\left(\frac{y}{h}\right)^{m}+a\left(\frac{y}{h}\right)^{m-1}+b\left(\frac{y}{h}\right)^{m-2}\ldots.$$

$\ldots+\left(\frac{y}{h}\right)+q=0$: e moltiplicando tutta l' equazione per h^{m} si avrà

$$\psi(y)=y^{m}+a.h.y^{m-1}+b.h^{2}.y^{m-2}+c.h^{3}.y^{m-3}+\ldots$$
$$\ldots+p.h^{m-1}y+q.h^{m}=0.$$

298. Trasformare una equazione $f(x)$ in un' altra in modo che le radici positive divengano negative, e le negative positive. Si dovrà porre $y=-x$, da cui $x=-y$: fatta perciò questa sostituzione nella equazione, cambieranno segno tutti i termini contenenti le potenze dispari dell' incognita, e si avranno i medesimi coefficienti. Infatti data l' equazione

$$f(x)=x^{m}+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+\ldots.+px+q=0,$$
fatta la sostituzione avremo

$$\varphi(y)=y^{m}-ay^{m-1}+by^{m-2}-cy^{m-3}+\ldots.-py+q=0$$
per m pari,

$$\varphi(y)=y^{m}-ay^{m-1}+by^{m-2}-cy^{m-3}+\ldots.+py-q=0$$
per m dispari.

Da queste due equazioni si vede che bisogna cambiare segno ai termini che sono in posto pari.

299. Per non parlare di tante altre trasformazioni, e prima di passare alla risoluzione delle equazioni, giova qui menzionare una importante trasformazione, la quale consiste nel trovare una equazione, le cui radici siano eguali ai quadrati delle differenze delle radici della proposta. Se la data $f(x)$ ha per radici

$a, b, c, d, \ldots$ la trasformata $F(y)$ dovrà avere per radici $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(a-d)^2$, $(b-c)^2$, ecc. . . . .

Nei vari trattati d' *Algebra complementare* sì nazionali che esteri potranno i giovani studiosi trovare i metodi di questa trasformazione, colla quale si può conoscere se l' equazione proposta ha radici eguali, e se ha tutte le sue radici reali.

Infatti se la proposta $f(x)=0$ avesse delle radici eguali, la *trasformata ai quadrati delle differenze* (che così si chiama) avrebbe tante radici nulle, quanti sono gli ambi che si possono fare con quelle radici eguali, e mancherebbe (n. 289) di altrettanti termini finali.

Egualmente se le radici della proposta $f(x)=0$ fossero tutte reali, quelle della trasformata sarebbero tutte positive, e quindi (n. 285) i segni di essa sarebbero alternativamente positivi e negativi: se ciò non si verifica, le radici della proposta non saranno tutte reali.

§. 4. Risoluzione delle equazioni numeriche.

300. Abbiamo trovato sino da principio di questo trattato le formole di risoluzione delle equazioni generali di 1.° e 2.° grado: più avanti indicheremo pure quelle di risoluzione delle equazioni generali di 3.° e 4.° grado. Al di là di questo grado non si conoscono formole generali, e non solo sono riesciti inutili tutti i tentativi fatti dai Matematici per risolvere equazioni generali superiori al 4.° grado, ma il celebre Ruffini nella sua profonda *Teoria delle equazioni*, e nella sua Opera *Riflessioni intorno alla soluzione delle*

equazioni algebriche ha dimostrato impossibile la risoluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al 4.°

Paolo Ruffini celebre matematico reggiano nacque nel 1765 e morì il 10 maggio 1822. Fu professore di analisi nell' Università di Modena, e poscia professore di matematiche applicate nel collegio militare della stessa città. Questo dotto, che apparteneva ad un grande numero di società scientifiche, fu nominato presidente della Società Italiana dei quaranta e direttore della Università di Modena.

Le sue opere sono:

1.ª Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto.
2.ª Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate, particolari, di un grado superiore al quarto.
3.ª Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo.
4.ª Dell' insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto.
5.ª Memoria sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado.
6.ª Risposta a' dubbi proposti dal socio Malfatti sopra l' insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto.
7.ª Riflessioni intorno al metodo proposto da Malfatti per la soluzione delle equazioni di quinto grado.
8.ª Dell' immaterialità dell' anima.
9.ª Dell' insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto, qualunque sia il metodo che si adoperi, algebraico o trascendentale.
10.ª Algebra e sua appendice.
11.ª Alcune proprietà generali delle funzioni.
12.ª Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche con un' appendice.

13.ª Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali.
14.ª Intorno al metodo generale proposto dal Sig. Wronski onde risolvere le equazioni di tutti i gradi.
15.ª Due opuscoli sulla classificazione delle curve algebraiche a semplice curvatura.
16.ª Riflessioni critiche sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del Sig. Laplace.

Gli analisti pertanto hanno diretti i loro studi e le loro ricerche alla risoluzione delle *equazioni numeriche,* di quelle cioè nelle quali i coefficienti sono rappresentati da numeri, ed hanno trovato dei metodi, col mezzo dei quali si possono determinare le radici di una equazione numerica di un grado qualunque.

301. I limiti assegnati a questo trattato elementare non permettono di entrare nel vasto ed importante campo della risoluzione delle equazioni numeriche, e di parlare dei metodi trovati dai matematici per determinare le radici *multiple,* le *radici eguali* e di *segno contrario,* le radici *immaginarie,* e le radici *reali positive* o *negative.*

Non sarà inutile però l' avvertire che se un' equazione a radici reali non contiene coefficienti frazionari, questa non potrà avere radici frazionarie, poichè sostituendo nella $f(x)=x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\,..+px+q=0$ invece di x la supposta radice frazionaria $\frac{h}{k}$ si otterebbe

$$\left(\frac{h}{k}\right)^m=-\left\{a\left(\frac{h}{k}\right)^{m-1}+b\left(\frac{h}{k}\right)^{m-2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+p\frac{h}{k}+q\right\},$$ la quale moltiplicata per k^{m-1} diventa

$$\frac{h^m}{k}=-\left\{ah^{m-1}+bkh^{m-2}+ck^2h^{m-3}\ldots+phk^{m-2}+qk^{m-1}\right\}:$$

questa relazione è impossibile, perchè sarebbe una frazione eguale ad una quantità intera. L' ultimo termine noto dell' equazione $f(x)=0$ essendo il prodotto delle radici (astrazione fatta dal segno), conterrà queste radici, le quali si troveranno dunque fra i divisori di quest' ultimo termine.

Vediamo ora di assegnare fra i divisori dell' ultimo termine quelli che possono essere radici della medesima.

Sia $f(x)=x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+px+q=0$: fatto $y=x-1$, ed $y=x+1$, e sostituiti questi valori nella data si avrà (n.° 297)

$$(\alpha)\ f(y+1)=f(1)+f'(1)y+\frac{f''(1)y^2}{2}+\frac{f'''(1)y^3}{2.3}+\ldots\ldots+y^m=0,$$

$$(\beta)\ f(y-1)=f(-1)+f'(-1)y+\frac{f''(-1)y^2}{2}+\frac{f'''(-1)y^3}{2.3}+\ldots\ldots+y^m=0.$$

Supponiamo che a sia una radice della proposta $f(x)$; per le ipotesi fatte sarà $y=a-1$, ovvero $y=a+1$: perciò $a-1$ sarà una radice della equazione (α): e la $a+1$ sarà una radice della seconda (β). Da ciò si deduce che a sarà fra i divisori dell' ultimo termine noto della $f(x)$, ossia fra i divisori di $f(0)$, $a-1$ sarà fra i divisori dell' ultimo termine noto della (α), ossia fra i divisori di $f(1)$, e finalmente $a+1$ sarà fra i divisori dell' ultimo termine noto della (β) ossia fra i divisori di $f(-1)$.

Dunque facendo successivamente nella proposta $x=1, x=0, x=-1$, potranno essere sole radici delle medesime quei divisori di $f(0)$, i quali diminuiti dell' unità trovansi tra i divisori di $f(1)$, ed accresciuti dell' unità tra quelli di $f(-1)$.

§. 5. Delle equazioni generali di 3.° e 4.° grado.

302. *Equazioni di 3.° grado.* Una equazione di 3.° grado può sempre ridursi alla forma
$x^3+ax^2+bx+c=0$, essendo a, b, c, quantità note.
Facciamo in questa equazione $x=y-\frac{a}{3}$: avremo

$$x^3=y^3-ay^2+\frac{a^2y}{3}-\frac{a^3}{27},$$

$$ax^2=ay^2-\frac{2a^2y}{3}+\frac{a^3}{9}$$

$$bx=by-\frac{ab}{3}.$$

Quindi sostituendo si avrà

$$y^3-ay^2+\frac{a^2y}{3}-\frac{a^3}{27}+ay^2-\frac{2a^2y}{3}+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=0$$

ossia

$$y^3+y\left(b-\frac{a^2}{3}\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0,$$

la quale si può mettere sotto la forma $y^3+py+q=0$, nella quale p e q sono quantità note dipendenti dai coefficienti a, b, c.

Perciò se sapremo risolvere quest' ultima equazione sapremo pure trovare i valori della proposta $x^3+ax^2+bx+c=0$.

L' artificio adoperato dai primi matematici che risolsero l' equazione

$$(1)\quad x^3+px+q=0$$

consiste nel confrontarla con un' altra equazione di terzo grado, della quale si conosca una radice. Facciamo pertanto $x=h+k$, ed eseguitone il cubo si avrà $x^3=h^3+3h^2k+3hk^2+k^3=h^3+k^3+3hk(h+k)$, ossia $x^3-3hk(h+k)-(h^3+k^3)=0$, la quale, sostituendovi x invece di $h+k$, diventa

$$(2)\quad x^3-3hkx-(h^3+k^3)=0:$$

questa equazione avrà evidentemente la radice $h+k$, avendo prima supposto che sia $x=h+k$.

Le due equazioni (1) e (2) sarebbero identiche se fosse $p=-3hk$, e $q=-(h^3+k^3)$: ora determiniamo i valori di h e k in modo che essi verifichino queste due eguaglianze, poichè allora questi valori così trovati faranno diventare identiche le due equazioni (1), (2), e (n.° 288) la radice $h+k$ della seconda sarà una radice della (1).

Pertanto dalle due equazioni avremo

$$p^3=-27h^3k^3,\ q=-(h^3+k^3),\ \text{ossia}$$

$$h^3+k^3=-q,\ \text{e}\ h^3k^3=-\frac{p^3}{27},$$

dalle quali sarà facile trovare i valori di h^3 e k^3.

Infatti si costruisca un' equazione di secondo grado che abbia per variabile z, e per radici h^3 e k^3: essa sarà

$$z^2-(h^3+k^3)z+h^3.k^3=0,$$

ossia

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0,$$

dalla quale si ricava

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ :$$

p e q essendo quantità note, sarà facile trovare le due radici che saranno $z_{,}=h^3$, e $z_{,,}=k^3$.
Sarà perciò

$$z_{,}=h^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ ,$$

$$z_{,,}=k^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ ,$$

ed estraendo la radice cubica

$$h=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ ,$$

$$k=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ .$$

Il valore dunque di x che risolve l' equazione (1) sarà

$$(3)\quad x=h+k=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{4}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ .$$

Questa formola fu trovata da Scipione Ferro nel 1505 e dopo da Tartaglia nel 1535: fu poi pubblicata insieme colla dimostrazione da Cardano nel 1545: per la qual cosa porta il nome di *formola cardanica*.

303. L' equazione nostra (1) dovrà avere (n. 284) tre radici che chiameremo α, β, γ; di queste avendone già trovata una per esempio α, sarà facile trovare le altre due, poichè l' equazione (1) dovrà essere divisibile (n. 283) pel fattore binomio $x-\alpha$.

Fatta la divisione si trova per quoziente $x^2+\alpha x+p+\alpha^2$, e per resto $\alpha p+q+\alpha^3$ il quale dovrà essere zero, perchè la divisione deve essere esatta.

Il quoziente pertanto $x^2+\alpha x+p+\alpha^2$ posto eguale allo zero darà l' equazione di secondo grado, le cui radici saranno β e γ.

Scipione Dal Ferro o Ferreo matematico bolognese del secolo XVI insegnò le matematiche a Bologna dal 1496 al 1526, ed è noto nella storia delle scienze per essere stato il primo a risolvere le equazioni di terzo grado. Ferro comunicò questa sua scoperta dietro promessa di segreto al suo discepolo Antonio Del Fiore, il quale sfidò Tartaglia nella soluzione dei problemi, e gli propose questioni, le cui soluzioni dipendevano da equazioni cubiche. Tartaglia accortosi che le proposte questioni dipendevano da equazioni di 3.° grado, rivolse la sua attenzione sopra queste equazioni, delle quali trovò la risoluzione, e riescì vincitore in questa disfida. Tartaglia comunicò queste formole a Cardano, il quale non ostante la promessa del segreto le pubblicò nel suo libro *Ars magna*, allargandone però le applicazioni e la discussione.

Niccolò Tartaglia celebre geometra bresciano nacque a Brescia nel principio del secolo XVII e morì a Venezia nel 1557. Niccolò di povera famiglia, ed orfano di sei anni non potendo

pagare nessun maestro non imparò da altri che a compitare appena e a scrivere: di più ebbe la sventura di ricevere colpi di spada da un soldato di Gastone di Foix, che gli spaccò le labbra e gli cagionò un difetto nella pronuncia, per la qual cosa fu per dispregio chiamato *Tartaglia*, nome che gli fu conservato in seguito, e che egli rese illustre col divenire uno dei primi matematici del suo secolo. Fu professore di matematica a Verona, Venezia, Brescia, e di nuovo a Venezia.

Tartaglia pubblicò molte Opere sì di matematica pura che mista.

Girolamo Cardano medico e geometra celebre nacque a Pavia nel 1501 e morì a Roma nel 1576. All' età di 20 anni si recò all' Università di Pavia per terminarvi i suoi studi e nel 1524 andò a Padova, ove fu ricevuto dottore in medicina nel 1525. Poscia fu professore di matematiche e di medicina a Milano, a Pavia e a Bologna, dalla quale città partì nel 1571 e andò a Roma ove fu ricevuto nel collegio medico.

Cardano di forte ingegno e di viva immaginazione fu distinto oratore, naturalista, geometra, medico, fisico, moralista e filologo. Egli è il primo che abbia pubblicato il metodo della risoluzione delle equazioni del terzo grado.

Fra le molte sue opere notiamo le seguenti che sono le principali che riguardano le matematiche:

1.ª Practica arithmetica;
2.ª Aphorismi astronomici;
3.ª Ars magna quam vulgo Cossam vocant, seu de regulis algebrae liber unus;
4.ª Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum, etc.

Tutti gli scritti di Cardano, in numero di 50, sono stati raccolti da Carlo Spon in 10 volumi in foglio col titolo di *Hieronymi Cardani Opera omnia*. Lione, 1663.

304. *Risoluzione delle equazioni di 3.° grado col mezzo di funzioni circolari per la ricerca delle radici reali.*

Si chiama caso *irreducibile* in algebra quello nel quale le radici della *risolvente* sono immaginarie, sebbene l' equazione data abbia tutte le radici reali. Per superare sopratutto le difficoltà che presentava questo caso, i matematici hanno applicato il calcolo trigonometrico a tale risoluzione.

Abbiasi da risolvere l' equazione

$$(\alpha) \qquad x^3+px+q=0$$

già priva del secondo termine, dalla quale si è trovato (n.° 302)

$$(\beta) \qquad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

1.° *Caso.* Si abbia (caso irreducibile) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$.

Essendo $\frac{q^2}{4}$ un quadrato perfetto, dovrà essere p negativo: l' equazione (α) diventerà dunque

$$(\alpha') \qquad x^3-px+q=0.$$

Dalla trigonometria si ha

Sen.$(a+b)$=Sen.aCos.b+Sen.b.Cos.a,

e fatto $b=2a$ si avrà

$$\text{Sen. } 3a=\text{Sen.}a.\text{Cos.}2a+\text{Sen.}2a.\text{Cos.}a,$$

ma $\text{Sen.}2a=2\text{Sen.}a\text{Cos.}a$, $\text{Cos. }2a=\text{Cos.}^2a-\text{Sen.}^2a$, dunque

$$\text{Sen.}3a=\text{Sen.}a\text{Cos.}^2a-\text{Sen.}^3a+2\text{Sen.}a.\text{Cos.}^2a$$

ossia $\text{Sen.}3a=3.\text{Sen.}a.\text{Cos.}^2a-\text{Sen.}^3a.$

Poniamo in questa $1-\text{Sen.}^2a$ invece di Cos.^2a, ed $\frac{a}{3}$ invece di a: si otterrà

$$\text{Sen.}a=3.\text{Sen.}\frac{a}{3}\left(1-\text{Sen.}^2\frac{a}{3}\right)-\text{Sen.}^3\frac{a}{3},$$

dalla quale si ricava

$$\text{Sen.}^3\frac{a}{3}-\frac{3}{4}.\text{Sen.}\frac{a}{3}+\frac{\text{Sen.}a}{4}=0.$$

Da quest' ultima formola è facile dedurre che si può scrivere in generale

$$(\gamma)\ \text{Sen.}^3\phi-\frac{3}{4}.\ \text{Sen.}\phi+\frac{1}{4}.\ \text{Sen.}3\phi=0.$$

Ora confrontiamo questa colla (α'). In questa facciamo $x=r.\ \text{Sen.}\phi$, ove r è un fattore, e ϕ un angolo incognito; essa diventerà

$$(\alpha'')\ \text{Sen.}^3\phi-\frac{p}{r^2}.\ \text{Sen.}\phi+\frac{q}{r^3}=0.$$

Confrontando le due (γ) e (α''), queste diventeranno identiche se sarà

$$\frac{p}{r^2}=\frac{3}{4}\ ,\ \frac{q}{r^3}=\frac{1}{4}.\ \text{Sen.}3\phi\ ,$$

dalle quali si ricava

$$r=2.\sqrt{\frac{p}{3}}\ ,\quad \text{Sen.}3\phi=\frac{4q}{r^3}\ ,$$

ossia sostituendo in quest' ultima il valore di r trovato dall' altra si avranno le due

$$r=2.\sqrt{\frac{p}{3}}\ ,\ \text{Sen.}3\phi=\frac{q}{2}.\ \sqrt{\frac{27}{p^3}}\ .$$

Con queste equazioni saranno dunque determinati il fattore r e l' angolo 3ϕ, e quindi l' angolo ϕ: e ponendo i suoi valori nella formola $x=r$ Sen.ϕ, avremo le radici dell' equazione (α') .

Tutti gli archi corrispondenti a Sen. $3\ \phi$ sono compresi nelle due formole

$$2n\pi+3\phi\ ,\ \text{e}\ (2n+1)\pi-3\phi\ ,$$

e prendendone il terzo si avrà

$$\frac{2n\pi}{3}+\phi\ ,\quad \text{e}\quad \frac{2n+1}{3}\pi-\phi\ .$$

Perciò si avranno i valori di x dalle due formole

$$x=r.\text{Sen.}\left(\frac{2n\pi}{3}+\phi\right),\ \text{e}\ x=r.\text{Sen.}\left(\frac{2n+1}{3}\pi-\phi\right),$$

dando successivamente ad n i valori 0, 1, 2.

Avremo dunque i sei valori

$x = r\mathrm{Sen}.\phi,$

$x_{\prime\prime} = r\mathrm{Sen}.\left(\frac{2\pi}{3}+\phi\right),$

$x_{\prime\prime\prime} = r\mathrm{Sen}.\left(\frac{4\pi}{3}+\phi\right),$

$x_{\mathrm{IV}} = r\mathrm{Sen}.\left(\frac{\pi}{3}-\phi\right),$

$x_{\mathrm{V}} = r\mathrm{Sen}.\ (\pi-\phi),$

$x_{\mathrm{VI}} = r\mathrm{Sen}.\left(\frac{5\pi}{3}-\phi\right);$

ma poichè si ha

$$\mathrm{Sen}.(\pi-\phi)=\mathrm{Sen}.\phi, \mathrm{Sen}.\left(\frac{2\pi}{3}+\phi\right)=\mathrm{Sen}.\left(\frac{\pi}{3}-\phi\right),$$

$$\mathrm{Sen}.\left(\frac{4\pi}{3}+\phi\right)=\mathrm{Sen}.\left(\frac{5\pi}{3}-\phi\right)=-\mathrm{Sen}.\left(\frac{\pi}{3}+\phi\right)$$

perciò i sei valori di x si riduranno ai tre

$x_{\prime} = r.\mathrm{Sen}.\phi,\ x_{\prime\prime} = r\mathrm{Sen}.\left(\frac{\pi}{3}-\phi\right),$

$x_{\prime\prime\prime} = -r\ \mathrm{Sen}.\left(\frac{\pi}{3}+\phi\right).$

2.° *Caso.* Supponiamo ora $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$: l'equazione ha due radici immaginarie ed una reale.

Nell' equazione $x^3+px+q=$, p può essere positivo o negativo.

Si prenda p positivo: la radice reale verrà rappresentata dalla

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{q^3}{27}}},$$

la quale si potrà scrivere sotto la forma

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left\{\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{4p^2}{27q^2}}}\right\}.$$

La quantità $\frac{4p^3}{27q^2}$ é positiva, e quindi si può scrivere $\frac{4p^3}{27q^3}=\text{tang.}^2\,\phi$, dalla quale si potrà determinare l' angolo ϕ.

Si avrà dunque

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left\{\sqrt[3]{1-\sqrt{1+\text{tang.}^2\phi}}\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\text{tang.}^2\phi}}\right\};$$

ma essendo $\text{Sec.}\phi=\sqrt{1+\text{tang.}^2\phi}$, si troverà

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\left\{\sqrt[3]{1-\text{Sec.}\phi}+\sqrt[3]{1+\text{Sec.}\phi}\right\}=$$
$$=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\left\{\sqrt[3]{\frac{\text{Cos.}\phi-1}{\text{Cos.}\phi}}+\sqrt[3]{\frac{\text{Cos.}\phi+1}{\text{Cos.}\phi}}\right\}.$$

Avendo fatto $\frac{4p^3}{27q^2}=\text{tang.}^2$, sarà $\frac{q^2}{4}=\frac{p^3}{27.\text{tang.}^2\phi}$ $=\frac{p^3\text{Cos.}^2\phi}{27.\text{Sen.}^2\phi}$, da cui

$$\frac{q}{2}=\frac{p\text{Cos.}\phi}{3\text{Sen.}\phi}.\sqrt{\frac{p}{3}},$$

e perciò

$$x=-\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\frac{\text{Cos.}\phi-1}{\text{Sen.}\phi}}+\sqrt[3]{\frac{\text{Cos.}\phi+1}{\text{Sen.}\phi}}\right\}:$$

ma dalla trigonometria avendosi $\frac{1+\text{Cos.}\phi}{\text{Sen.}\phi}=\text{Cot.}\frac{\phi}{2}$ e $\frac{1-\text{Cos.}\phi}{\text{Sen.}\phi}=\text{tang.}\frac{\phi}{2}$, sarà

$$x=-\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{\text{Cot.}\frac{\phi}{2}}-\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{\phi}{2}}\right\}.$$

Per rendere semplice e facilmente calcolabile que-

sta formola facciamo $\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{\phi}{2}}=\text{Cot. }\psi$, essendo ψ un angolo che si potrà calcolare conoscendo già l' angolo ϕ: la radice superiore verrà data dalla

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\ (\text{tang.}\psi-\text{Cot.}\psi):$$

ma si ha dalla trigonometria

$$\text{Cot.}2\psi=\frac{1}{2}.\ \text{Cot.}\psi-\frac{1}{2}.\ \text{tang.}\psi\ ,$$

ossia

$$2.\text{Cot.}2\psi=\text{Cot.}\psi-\text{tang.}\psi\,.$$

Perciò

$$x=-2\text{Cot.}2\psi\ \sqrt{\frac{p}{3}}\ ,$$

formola facilmente calcolabile, la quale dà la radice reale dell' equazione di 3.° grado quando p è positivo.

Quando p è negativo, l' equazione diventa

$$x^3-px+q=0.$$

Sostituendo $-p$ invece di $+p$ nella *formola cardanica,* e posto $\frac{4p^3}{27q^2}=\text{Sen.}^2\phi$, e poscia fatto

$$\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{\phi}{2}}=\text{tang. }\psi\ ,$$

si ricaverebbe

$$x=\frac{2}{\text{Sen.}2\psi}\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\,.$$

305. *Equazioni di 4.° grado.* Tutte queste equazioni ad un' incognita si possono sempre ridurre alla forma (1) $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, dove a, b, c, d sono quantità note.

Trasformiamo, come abbiamo fatto per le equazioni di 3.° grado, questa equazione in un' altra di 4.° grado che sia priva del secondo termine, ponendo $x=y-\frac{a}{4}$. Si otterrà così un' equazione della forma

$$(2) \qquad y^4+py^2+qy+r=0.$$

Basterà dunque risolvere questa equazione, poichè mediante la fatta relazione $x=y-\frac{a}{4}$ si potranno trovare le radici della generale (1). Applicando il metodo usato per le equazioni di 3.° grado facciamo un' equazione di 4.° grado che abbia una radice nota $x=h+k+m$. Perciò innalziamo alla quarta potenza questa eguaglianza: avremo

$$x^4-2(h^2+k^2+m^2)\,x^2+(h^2+k^2+m^2)^2$$
$$-4(h^2k^2+h^2m^2+k^2m^2)-8hkm(h+k+m)=0,$$

e sostituendovi x in vece di $h+k+m$ si avrà

$$(3) \quad x^4-2(h^2+k^2+m^2)x^2-8hkmx$$
$$+(h^2+k^2+m^2)^2-4(h^2k^2+h^2m^2+k^2m^2)=0.$$

Dalla costruzione fatta si vede che questa equazione ha la radice $x=h+k+m$, e se col disporre delle indeterminate h, k e m, faremo diventare identiche le due equazioni (2) e (3), anche l' equazione (2) avrà la radice $x=h+k+m$. Perchè siano identiche le equazioni (2) e (3), dovranno verificarsi le condizioni

$$p=-2(h^2+k^2+m^2), \quad q=-8hkm,$$
$$r=(h^2+k^2+m^2)^2-4(h^2k^2+h^2m^2+k^2m^2).$$

Evidentemente queste equazioni si possono scrivere sotto le tre forme

$$h^2+k^2+m^2=-\frac{p}{2}\,,\qquad h^2k^2m^2=\frac{q^2}{64}\,,$$

$$h^2k^2+h^2m^2+k^2m^2=\frac{p^2-4r}{16}\,.$$

Per determinare i valori di h, k, e m in funzione delle qnantità note p, q e r facciamo un' equazione di 3.° grado che abbia per radici h^2, k^2 m^2. Ricordando le relazioni (n.° 287) fra le radici ed i coefficienti delle equazioni sarà facile vedere che l' equazione

$$(4)\qquad y^3+\frac{py^3}{2}+\frac{p^2-4r}{16}\cdot y-\frac{q^2}{64}=0$$

sarà la dimandata, essendo il coefficiente del secondo termine eguale alla somma delle radici col segno cambiato, il coefficiente del terzo termine eguale alla somma dei prodotti binari delle radici, il quarto termine eguale al prodotto delle radici col segno cambiato.

Questa equazione (4) che serve per la risoluzione di 4.° grado è stata chiamata *risolvente* da Eulero e *ridotta* da Clairaut e da altri.

Risolvendo questa equazione (4) col metodo indicato precedentemente (n.° 302) si troveranno le tre radici, le quali chiamate y_1, y_2, y_3, daranno

$h^2=y_1$, $k^2=y_2$, $m^2=y_3$ dalle quali si ricava $h=\pm\sqrt{y_1}$, $k=\pm\sqrt{y_2}$, $m=\pm\sqrt{y_3}$,

L' ipotesi fatta $x=h+k+m$ diventerà perciò

$$x=\pm\sqrt{y_1}\pm\sqrt{y_2}\pm\sqrt{y_3}\,.$$

La scoperta della risoluzione delle equazioni generali di 4.° grado fu fatta da Lodovico Ferrari matematico bolognese; fu pubblicata da Cardano nel 1545 e da Bombelli nel 1579.

Ferrari allievo di Cardano nacque a Bologna il 2 febbrajo 1522, e morì nel 1562.

CAPITOLO XVI.

DELLE SERIE

---

306. Dicesi *serie* un aggregato di quantità

(1) x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , ... x_n , ... ,

che procedono con una legge comune di formazione, ed il cui numero è infinito.

Le quantità x_1 , x_2 , . . . sono *i termini della serie;* la quale può essere *reale* o complessa (n.° **71**) secondochè i termini corrispondenti sono reali o complessi.

Il principale uso delle serie consiste nella ricerca dei valori approssimati delle funzioni frazionarie, irrazionali e trascendentali i quali corrispondono a dati valori particolari di una variabile.

Sia $\Sigma_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ la somma dei primi *n* termini delle serie (1).

Se per valori crescenti di *n* la somma Σ_n si avvicina indefinitamente ad un limite finito e determinato S la serie dicesi *convergente,* e questo limite S si chiama la *somma* o il *valore* della serie.

Se al crescere indefinito di *n,* la somma Σ_n aumenta indefinitamente, la serie chiamasi *divergente.*

Finalmente se la somma Σ_n converge verso quantità finite, ma diverse a seconda del valore di *n*; allora la serie si dice *indeterminata.*

Delle tre serie

$$1.^a \quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots$$

$$2.^a \quad 1+2+3+4+\ldots$$

$$3.^a \quad 1-1+1-1+\ldots$$

la prima è *convergente,* la seconda *divergente,* e la terza *indeterminata,*

307. *Sviluppo in serie delle funzioni algebriche.* Per isviluppare le funzioni in serie uno dei metodi più comuni è quello dei *coefficienti indeterminati.* Questo metodo consiste nel rappresentare la data funzione $f(x)$ con una serie, ove i coefficienti restano a determinarsi dipendentemente dalla forma della funzione o da alcune sue proprietà.

Questo metodo appoggiasi sul principio spiegato al n.° 145, col quale si ottengono alcune equazioni dalle quali si vengono a trovare i valori dei coefficienti indeterminati.

Esempio 1.° Sviluppare in serie la funzione $f(x)=\frac{1}{1-x}$

Pongasi $\frac{1}{1-x}=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$

Da questa si otterrà

$$1=a+(b-a)x+(c-b)x^2+(d-c)x^3+\ldots,$$

e confrontando i coefficienti delle medesime potenze di x si avranno le equazioni

$$a=1,\ b-a=0,\ c-b=0,\ d-c=0,\ldots$$

dalle quali si ricava

$$a=1,\ b=1,\ c=1.\ d=1,\ldots$$

e la funzione superiore si cambierà nella serie

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

Esempio 2.° Sviluppare in serie la funzione $\frac{1}{1+x}$

Si porrà $\frac{1}{1+x}=a+bx+cx^2+\ldots$

Fatto il calcolo si trova

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Esempio 3.° Ridurre in serie la funzione $f(x)=\frac{m}{a+bx}$

Facciamo $\frac{m}{a+bx}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\cdots$.

Sarà facile determinare A, B, C, . . .

308. Queste serie ora trovate dallo sviluppo di funzioni fratte diconsi *ricorrenti*, perchè ogni termine delle medesime si deduce da un certo numero di quelli che immediatamente lo precedono con una legge determinata da un' equazione che chiamasi *equazione di relazione.*

È evidente che le funzioni fratte si possono anche sviluppare in serie mediante la divisione.

309. *Sviluppo in serie delle funzioni trascendenti.*

Svolgiamo in serie secondo le potenze crescenti dell' arco x le funzioni Sen. x, Cos, x.

Facciamo

(1) Sen. $x=ax+bx^3+cx^5+\ldots$, ove non si è posto il termine noto, poichè quando l' arco è zero, il seno deve essere zero, e di più si sono poste le sole potenze dispari della x, perchè quando l' arco è negativo, deve essere pure negativo il seno.

Scriviamo pure

(2) Cos. $x=1+\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x^4+\mathrm{C}x^6+\ldots$, nella quale si è posto 1 nel termine noto, poichè per $x=0$ il

coseno è *uno,* e di più si sono poste le sole potenze pari di x, perchè prendendo l' arco negativo il segno del coseno non cambia.

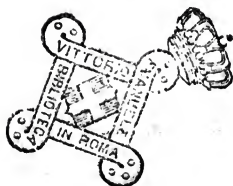
Dalla equazione (1) si avrà pure

$$(3)\ \text{Sen. } 2x = 2ax + 8bx^3 + 32cx^5 + \ldots$$

Questi supposti valori di Sen. x, Cos. x, Sen. $2x$ posti nelle equazioni

Sen.$^2x +$ Cos.$^2x = 1$, Sen.$2x = 2$ Sen. x. Cos. x daranno due equazioni, dalle quali col metodo dei *coefficienti indeterminati* si ricaveranno nuove equazioni colle quali si determineranno i valori $a, b, c, \ldots$ A, B, C, ... e dopo alcune considerazioni si troverano le due serie

$$(\alpha)\ \text{Sen.} x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$(\beta)\ \text{Cos.} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \ldots$$

ELENCO DELLE NOTE

1. Archimede . . . . pag. 38
2. Bachet di Meziriaco . . . . » 269
3. Baltzer . . . . » 53
4. Bernoulli Giacomo . . . . » 139
5. Bernoulli Giovanni . . . . » 62, 130
6. Bertrand . . . . » 210
7. Betti . . . . » 210
8. Bezout . . . . » 87
9. Bombelli . . . . » 2, 330
10. Boncompagni . . . . » 17, 100
11. Bossut . . . . » 131
12. Briggs . . . . » 284, 287
13. Brouncker . . . . » 253, 254
14. Cagnoli . . . . » 287
15. Callet . . . . » 287
16. Cardano . . . . » 2, 321, 330
17. Cartesio . . . . » 172
18. Cataldi . . . . » 253; 254
19. Cauchy . . . . » 299
20. Cavalieri . . . . » 287
21, Clairant . . . . » 62, 330
22 Cossali . . . . » 100
23. Cremona . . . . » 53
24. Descartes . . . . » 5, 7, 50
25. Diofanto . . . . » 2, 11; 182, 269
26. Euclide . . . . » 2, 43, 269
27. Eulero . . . . » 253, 254, 330
28. Ferrari . . . . » 330
29. Fibonacci . . . . » 16, 43, 182
30. Gardiner . . . . » 287
31. Harriot . . . . » 26, 303
32. Huygens . . . . » 253, 254

53. Keulen . . . . pag. 253
34. Keppler . . . . » 287
35. Köhler . . . . » 287
36. Lagrangia . . . . » 253, 255, 269
37. Lalande . . . . » 287, 288
38. Laplace . . . . » 100
39. Leibnitz . . . . » 7, 17, 62
40. Leonardo da Vinci . . . . » 2, 7
41. Libri . . . . » 131
42. Luvini . . . . » 287, 288
43. Mezio . . . . » 253
44. Montucla . . . . » 131
45. Napier . . . . » 283, 284
46. Newton . . . . » 38, 42, 135, 220
47. Oughtred . . . . » 7
48. Paccioli . . . . » 2
49. Pascal . . . . » 130
50. Pazzi . . . . » 2
51. Recorde . . . . » 7
52. Rudolff . . . . » 40
53. Ruffini . . . . » 314
54. Santini . . . . » 287
55. Scipione dal Ferro . . . . » 320
56. Stefano de la Roche . . . . . . » 7, 40
57. Stevin . . . . » 7, 42
58. Stiefel . . . . » 7, 38, 40
59. Tartaglia . . . . » 2, 320
60. Ursinus . . . . » 287
61. Viete . . . . » 2, 303
62. Vlacq . . . . » 287
63. Wallis . . . . » 253, 254
64. Wronski . . . . » 254